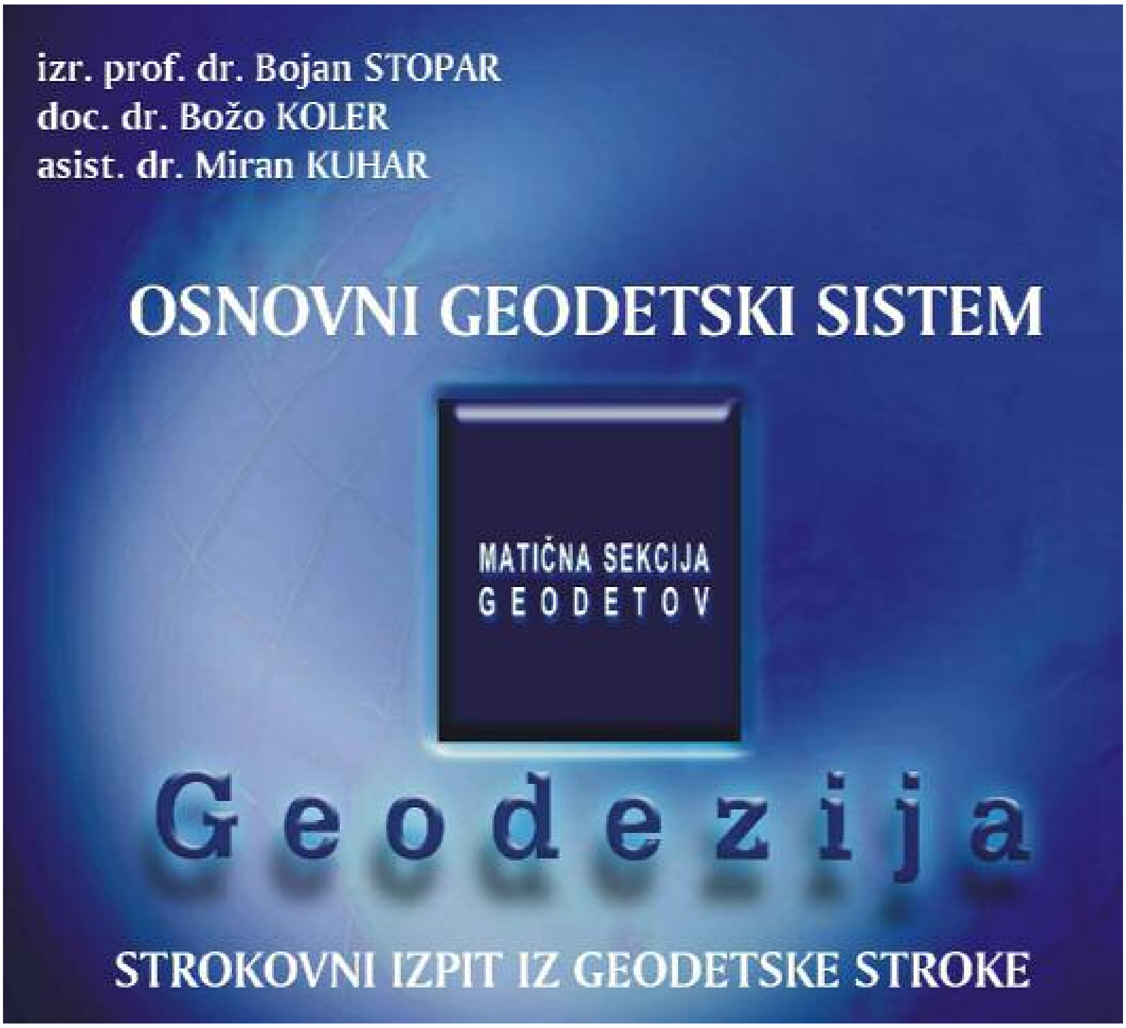
Projekt: **Programska zasnova in priprava gradiv za izvedbo strokovnega dela izpita iz geodetske stroke**

Naročnik: **Inženirska zbornica Slovenije, Matična sekcija geodetov**
Dunajska 104, Ljubljana
Odgovorna oseba: Matjaž Grilc, predsednik upravnega odbora

Izvajalca:
Geodetski inštitut Slovenije (GI)
Jamova cesta 2, Ljubljana
Odgovorna oseba: mag. Roman Rener, v.d. direktorja

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (FGG), Oddelek za geodezijo
Jamova cesta 2, Ljubljana
Odgovorna oseba: prof. dr. Jurij Banovec, dekan



MATERIALI ZA PRIPRAVO NA STROKOVNI IZPIT IZ GEODETSKE STROKE

izr. prof. dr. Bojan STOPAR
doc. dr. Božo KOLER
asist. dr. Miran KUHAR

OSNOVNI GEODETSKI SISTEM

Kazalo:

1. KOORDINATNI SISTEMI V GEODEZIJI

Naloga geodezije je pridobivanje in upravljanje podatkov o življenjskem prostoru. Pomen prostorskih podatkov postaja na vseh ravneh odločanja in upravljanja vse večji. Lociranje in nujnost povezovanja prostorskih podatkov zahteva njihovo obravnavo v koordinatnem sistemu. Vzpostavitev in vzdrževanje državnega koordinatnega sistema je ena od nalog državne geodetske službe.

1.1 Koordinatni sistem in koordinatni sestav

Koordinatni sistem predstavlja množico pravil, s katerimi je določen način dodeljevanja koordinat posameznim točkam. Položaj v koordinatnemu sistemu torej podajamo s koordinatami. Koordinata je eno izmed n-števil, s katerimi je določen položaj točke v n-razsežnem prostoru. Položaj obravnavamo kot absolutno količino, koordinate, ki podajajo položaj, pa kot relativne količine, ki so odvisne od koordinatnega sistema. Za podatek o položaju v geometrijskem smislu tako zadošča eno-, dvo- in trirazsežni koordinatni sistem. Za opis sprememb položaja v času uporabljamo še četrto koordinato (razsežnost), to je čas. Pri obravnavi geodinamičnih pojavov pa uporabljamo šestrazsežni koordinatni sistem, kjer trem koordinatam, ki podajajo geometrijski položaj, dodamo še tri koordinate, ki predstavljajo hitrosti sprememb koordinat točk.

Vzpostavitev koordinatnega sistema je sestavljena iz dveh korakov:
- teoretične definicije koordinatnega sistema in
- povezave teoretično definiranega koordinatnega sistema s fizičnim objektom.

Prvi korak vzpostavitve koordinatnega sistema predstavlja dogovor o:
- razsežnosti koordinatnega sistema (eno-, dvo-, tri- ali večrazsežen koordinatni sistem),
- tipu koordinat (linijske, kotne, kotno-linijske,…),
- položaju izhodišča koordinatnega sistema (topocentričen, geocentričen,...),
- orientaciji koordinatnih osi in
- merilu (enoti) posameznih koordinat.

Drugi, in v primeru vzpostavitve koordinatnega sistema Zemlje tudi veliko težji korak, je povezava teoretično definiranega koordinatnega sistema s telesom Zemlje. To povezavo izvedemo preko trajno stabiliziranih geodetskih točk na zemeljskem površju, ki predstavljajo praktično realizacijo koordinatnega sistema. Praktično realiziran koordinatni sistem (angl.: *system*) imenujemo koordinatni sestav (angl.: *frame*). V klasični geodetski terminologiji predstavljajo koordinatni sestav fizično stabilizirane geodetske točke na zemeljski površini s koordinatami, določenimi v izbranem koordinatnem sistemu. Pri tem nastopi zanimiva dvoumna situacija: položaj točke želimo določiti v koordinatnem sistemu, ki pa ga praktično realizira ravno ta materialna točka. Ko želimo določiti položaj točke v koordinatnem sistemu, se vrtimo v začaranem krogu, saj koordinatni sistem praktično določa ravno točka, katere položaj določamo.

Zaradi globalnega (glede na celotno Zemljo) in lokalnega (v okolici fizično stabilizirane geodetske točke) geodinamičnega dogajanja pa se položaji točk na Zemlji stalno spreminjajo. Ustrezno obravnavanje koordinatega sestava mora zato vključevati tudi obravnavanje sprememb položajev točk, ki koordinatni sistem realizirajo. Za opis globalnega geodinamičnega dogajanja imamo na razpolago globalne geodinamične modele (NUVEL, APKIM), lokalno geodinamično dogajanje pa moramo ugotoviti z lokalnim spremljanjem sprememb položajev geodetskih točk.

Različne metode izmere in obdelave podatkov opazovanj se nanašajo na različne koordinatne sisteme. Pogoj za pridobitev optimalnih rezultatov izmere je zato poznavanje koordinatnih sistemov, na katere se izmera nanaša.

1.2 Geodetski datum

Geodetski datum definirajo količine, ki jih potrebujemo kot osnovo za določitev drugih količin. Geodetski datum obravnavamo kot potrebno število danih količin, ki jih potrebujemo za določitev novih količin v koordinatnem sistemu. Problem geodetskega datuma izhaja iz dejstva, da so običajna geodetska opazovanja, kot so dolžine, horizontalne smeri in zenitne razdalje takoimenovana notranja opazovanja oz. notranje količine, ki omogočajo le določitev relativnih koordinat točk. Koordinate točk v (predhodno definiranem) koordinatnem sistemu pa so t.i. zunanja opazovanja oz. zunanje količine. Te količine ne vplivajo neposredno na geometrijo medsebojnih položajev točk. To pomeni, da na osnovi klasičnih geodetskih opazovanj, brez dodatnih informacij o datumu, ne moremo pridobiti koordinat točk v koordinatnem sistemu. Potreba po datumu v matematičnem smislu pomeni, da je poleg števila opazovanj, ki mora biti vsaj enako številu neznank, potrebno zagotoviti minimalno število informacij za enolično določitev koordinat točk v koordinatnem sistemu. Geodetski datum naj bi bil praviloma zagotovljen z zunanjimi količinami.

Z geodetskim datumom je povezana tudi t.i. datumska ploskev, ki jo predstavlja matematična ploskev znane velikosti, oblike in lege v koordinatnem sistemu. Kot datumski ploskvi se v geodeziji uporabljata krogla in rotacijski elipsoid, v nalogah inženirske in nižje geodezije pa tudi ravnina. Položaj in orientacija datumske ploskve glede na dogovorjeni terestrični (CT) koordinatni sistem (glej poglavje 1.3.2) sta določena s položajem središča referenčnega elipsoida glede na izhodišče CT sistema in z zasukom glavnih osi elipsoida glede na smeri koordinatnih osi CT sistema. Če je središče referenčnega elipsoida postavljeno v poljuben položaj glede na težišče Zemlje, govorimo o astrogeodetskem datumu. Če je središče referenčnega elipsoida postavljeno v težišče Zemlje, je to geocentrični ali absolutni datum.

1.3 Terestrični koordinatni sistemi

S široko praktično uporabo tehnologij, ki omogočajo enostavno »prehajanje« državnih meja: internet, globalni satelitski navigacijski sistemi (GPS, GLONASS, GSM,…), je smiselno obravnavanje prostorskih podatkov v enotnem koordinatnem sistemu, veljavnem za celotno Zemljo - terestričnem koordinatnem sistemu. Tako danes praktična realizacija koordinatnega sistema ne zahteva več ogromnega števila geodetskih točk, pač pa zahteva vzpostavitev t.i. geodetskih observatorijev, ki opremljeni z ustrezno tehnologijo zagotavljajo dostop do terestričnih koordinatnih sistemov in omogočajo praktično realizacijo le-teh. Praktična realizacija terestričnega koordinatnega sistema poteka v današnjem času s postopki in tehnikami satelitske geodezije, kot so: VLBI (Very Long Baseline Interferometry), SLR (Satellite Laser Ranging), LLR (Lunar Laser Ranging) in GPS (Global Positioning System), ki so povezani s klasičnimi geodetskimi tehnikami in metodami izmere, kot so gravimetrična opazovanja ter geometrični nivelman.

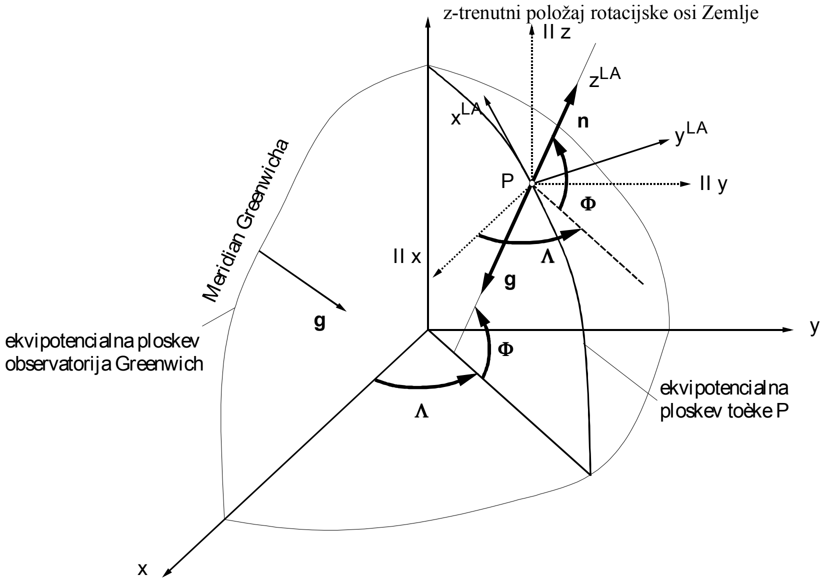
Terestrični koordinatni sistemi so definirani za celotno Zemljo. Pri tem se upoštevajo fizikalne lastnosti Zemlje kot nebesnega telesa. Tako je npr. Geodetic Reference System 1980 (GRS-80) definiran z naslednjimi štirimi parametri:

- $a = 6378137$m,
- GM $= 398600.5*10^9\ m^3\ s^{-2}$,
- $J_2 = 0.00108263$,
- $\omega\ = 7292.115*10^{-11}$ rad s^{-1}.

kjer je a velika polos elipsoida, ω kotna hitrost vrtenja elipsoida, GM produkt gravitacijske konstante G in mase elipsoida M, J_2 pa t.i. »dinamični faktor oblike« elipsoida. Zunanje težnostno polje rotacijskega elipsoida je z omenjenimi štirimi parametri v celoti definirano: dva parametra (a in J_2) definirata velikost in obliko elipsoida, eden (GM) maso elipsoida in eden (ω) njegovo kotno hitrost vrtenja. Numerične vrednosti omenjenih parametrov so izbrane kolikor je mogoče blizu dejanskim vrednostim Zemlje kot nebesnega telesa. Ti parametri definirajo t.i. normalni elipsoid, to je elipsoid dane mase in hitrosti vrtenja. Površino tega elipsoida predstavlja t.i ekvipotencialni elipsoid določene oblike in velikosti. Težnostno polje tega elipsoida je definirano s standardno težnostno enačbo. To je enačba, ki podaja vrednost normalnega težnostnega polja v točki kot funkcijo geodetske širine □ (po možnosti tudi geodetske dolžine □ in višine h). Obstaja več oblik standardnih težnostnih enačb.

1.3.1 NARAVNI KOORDINATNI SISTEM

Naravni koordinatni sistem je tisti, katerega smeri koordinatnih osi so definirane s smermi, ki obstajajo v naravi. Za uporabo v geodeziji sta posebej pomembni smer vektorja težnostnega pospeška in smer rotacijske osi Zemlje. Smer vektorja težnostnega pospeška definirata v tem sistemu težnostni potencial W in njegov gradient grad W. S horizontiranjem geodetskega instrumenta le-tega »vključimo« v ta koordinatni sistem.



Slika 1: Naravni koordinatni sistem

Smer vektorja težnosti **g** najenostavneje definiramo v lokalnem astronomskem (LA) koordinatnem sistemu. Ta sistem ima izhodišče v poljubni točki P na zemeljski površini. Pozitivna smer *z*-osi je pravokotna na ekvipotencialno ploskev skozi točko P, *x*-os je usmerjena v smeri tangente na astronomski meridian s pozitivno smerjo v smeri trenutnega severnega Zemljinega pola, pozitivna smer *y*-osi je izbrana tako, da je koordinatni sistem levosučen. Ker je koordinatni sistem LA topocentričen, je njegova uporaba v praksi omejena na redukcijo opazovanj, opravljenih na posameznih točkah, v enoten terestrični koordinatni sistem.

1.3.2 CT KOORDINATNI SISTEM

Za podajanje položaja v koordinatnem sistemu, ki je »pritrjen« na telo Zemlje, je izbran dogovorjeni terestrični (Conventional Terrestrial System-CTS, CT) koordinatni sistem. Sistem imenujemo dogovorjeni, ker temelji na dogovoru o načinu »pritrditve« koordinatnega sistema na telo Zemlje.

Smer vektorja težnosti $\mathbf{g}$ v CT koordinatnem sistemu je podana z astronomsko širino Φ in astronomsko dolžino Λ. Za opredelitev osnovnih količin v CT koordinatnem sistemu podajamo nekaj osnovnih definicij. Srednja ekvatorska ravnina je ravnina, ki je pravokotna na srednji položaj rotacijske osi Zemlje in vsebuje težišče Zemlje. Astronomska meridianska ravnina točke P je ravnina, ki vsebuje vektor težnosti $\mathbf{g}$ v točki P in vzporednico k srednjemu položaju rotacijske osi Zemlje, položeno skozi točko P. To pomeni, da je pravokotna na srednjo ekvatorsko ravnino. Astronomska dolžina Λ je kot med astronomskima ravninama dveh točk. Po dogovoru je astronomska dolžina Λ kot med astronomsko meridiansko ravnino Greenwicha in točko P. Pozitivna smer astronomske dolžine Λ je proti vzhodu. Astronomska širina Φ točke P je manjši kot med vektorjem normale $\mathbf{n}$ na ekvipotencialno ploskev v točki P in srednjo ekvatorsko ravnino, kjer je vektor normale $\mathbf{n}$ po smeri nasproten vektorju $\mathbf{g}$ v točki P. Astronomska širina Φ je pozitivna v smeri od srednje ekvatorske ravnine proti obema poloma.

Ta sistem ima izhodišče v težišču Zemlje, pozitivna smer osi *z* sovpada s srednjim položajem rotacijske osi Zemlje CIO (Conventional International Origin), pozitivna smer osi *x* je dana s presečiščem srednje ekvatorske ravnine in srednjega meridiana Greenwicha ter osjo *y*, ki je pravokotna na *XZ* ravnino, s pozitivno smerjo, izbrano tako, da je koordinatni sistem desnosučen. Ta koordinatni sistem je najpomembnejši koordinatni sistem v geodeziji.

1.3.3 ITRS KOORDINATNI SISTEMI

Za enotno in usklajeno uporabo že omenjenih merskih tehnik (SLR, LLR, VLBI, GPS) so bile vzpostavljene mednarodne službe, med katerimi je najpomembnejša IERS (International Earth Rotation Service), ki sta jo skupaj ustanovili IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics) in IAU (International Astronomical Union) in je nadomestila nekdanji BIH (Bureau International de l'Heure). Glavna naloga IERS je praktična realizacija ICRS (IERS Celestial Reference System) - nebesnega koordinatnega sistema in ITRS (IERS Terrestrial Reference System) - terestričnega koordinatnega sistema.

ITRS koordinatni sistem je dogovorjen terestrični koordinatni sistem, ki je geocentričen in pritrjen na telo Zemlje na osnovi dogovorjenega IERS referenčnega Zemljinega pola (IRP) in IERS referenčnega meridiana (IRM). Za izračun elipsoidnih koordinat (φ, λ, h) na osnovi pravokotnih koordinat X, Y, Z se uporablja GRS-80 referenčni elipsoid.

Praktična realizacija terestričnega koordinatnega sistema je ITRF (IERS Terrestrial Reference Frame). Imena različic ITRF koordinatnih sistemov so podane v obliki ITRF-yy, kjer je yy oznaka posamezne različice ITRF koordinatega sestava. Do sedaj se je zvrstila cela množica ITRF koordinatnih sestavov: ITRF89, ITRF90, ITRF91, ITRF92, ITRF93, ITRF94, ITRF96 in trenutno aktualni ITRF2000.

1. 3.4 ETRS89 KOORDINATNI SISTEM

V okviru IAG (International Association of Geodesy) je bila ustanovljena podkomisija EUREF (EUropean REference Frame) z nalogo vzpostavitve enotnega evropskega referenčnega sestava. Podkomisija EUREF je za področje Evrope definirala ETRS (European Terrestrial Reference System), ki ga uvrščamo med regionalne koordinatne sisteme. Koordinatni sistem ETRS so sprejele države članice IAG in je rezultat prve enotne evropske GPS izmere leta 1989. Praktična realizacija ETRS koordinatnega sistema je koordinatni sestav EUREF. Koordinatni sistem, ki ga je privzela podkomisija EUREF, sovpada z ITRS koordinatnim sistemom v začetku leta 1989 in je »pritrjen« na stabilni del Evrazijske plošče. Glede na letnico nastanka sistema se koordinatni sistem imenuje ETRS89.

V praksi obravnavamo in uporabljamo ETRS89 kot horizontalni koordinatni sistem, višinski evropski koordinatni sistem pa je EVRS (European Vertical Reference System). Oba sistema skupaj sestavljata ESRS (European Spatial Reference System). ESRS naj bi predstavljal homogeno, stabilno in natančno ogrodje za vse geodetske, geodinamične, geofizikalne in druge potrebe. Omogočal naj bi poenotenje koordinat v vsej Evropi za najrazličnejše potrebe, od katastra in drugih prostorskih informacijskih sistemov do navigacije.

V Sloveniji smo v okviru mednarodnih GPS izmer v letih 1994, 1995 in 1996 vzpostavili EUREF koordinatni sestav in pridobili položaje teh točk v ETRS89 koordinatnem sistemu. Zaradi globalnih geodinamičnih vzrokov so se položaji točk od časa izvedbe izmere do danes spremenili za pribl. 15 cm. Tako je tudi za neznane vrednosti, ki so posledice lokalnega geodinamičnega dogajanja. Za večino aplikacij, kot tudi za običajno uporabo v geodetski praksi, pa lahko koordinate točk obravnavamo kot konstantne v času.

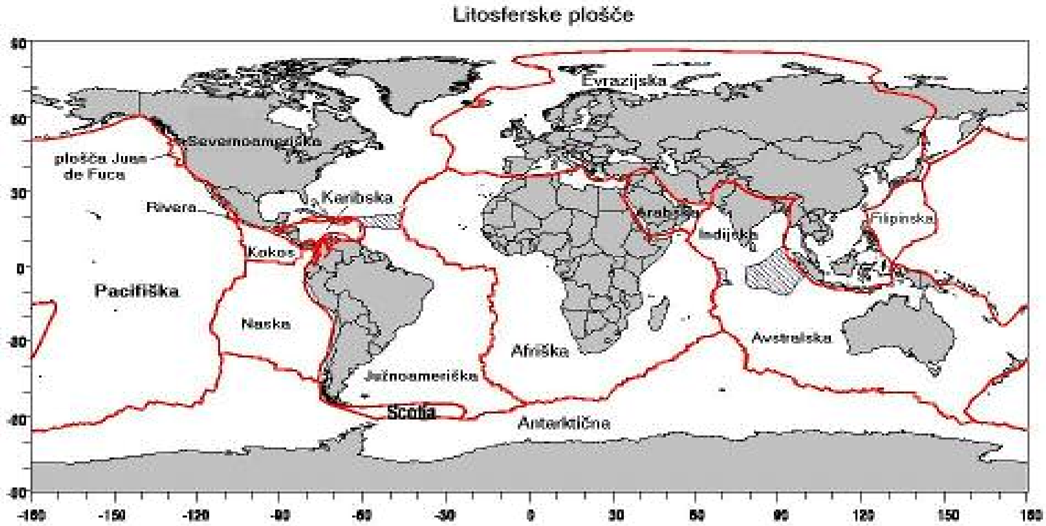
1.3.5 WGS-84 KOORDINATNI SISTEM

V povezavi z GPS (Global Positioning System) je pomemben WGS-84 (World Geodetic System 1984) terestrični koordinatni sistem. Izhodišče koordinatnega sistema je v težišču Zemlje, *z*-os koordinatnega sistema je usmerjena v smer dogovorjenega zemeljskega pola CTP (Conventional Terrestrial Pole), kot ga je definiral BIH, *x*-os je usmerjena proti presečišču BIH ničelnega meridiana in ravnine CTP ekvatorja, *y*-os zaključuje desnosučni ortogonalni koordinatni sistem. WGS-84 koordinatni sistem sovpada z ITRS in ETRS koordinatnimi sistemi v okviru 1 metra.

1.3.6 TEKTONIKA LITOSFERSKIH PLOŠČ

V povezavi s terestričnimi koordinatnimi sistemi je potrebno omeniti tudi tektoniko litosferskih plošč. Tektonika litosferskih plošč je geofizikalna teorija, ki opisuje spremembe položaje litosferskih plošč (velikih enot zemeljske skorje) in pojasnjuje te spremembe z relativnimi premiki posameznih plošč. Celotno Zemljino skorjo sestavlja

20 globalnih litosferskih plošč. Evrazijska plošča, na kateri leži tudi Slovenija, je ena največjih plošč, pokriva pa celotno Evropo in skoraj celo Azijo.



Slika 2: Globalna razdelitev litosferskih plošč

Hitrosti premikov točk na Zemljini površini, ki so posledica premikov litosferskih plošč, opisujejo kinematični modeli premikov litosferskih plošč. Obstaja več modelov kinematike litosferskih plošč: NUVEL-1, NNR-NUVEL-1, NUVEL-1A, NNR-NUVEL-1A, APKIM. Različne realizacije koordinatnih sestavov ITRF temeljijo na uporabi različnih geofizikalnih modelov. Tako definiciji sestavov ITRF91 in ITRF92 temeljita na geofizikalnem modelu NNR-NUVEL-1, sestavi ITRF93, ITRF94 in ITRF96 pa na modelu NNR-NUVEL-1A.

1.4 Koordinatni sistemi klasične geodezije

Položaj točke na površini Zemlje je določen z naravnimi - astronomskimi ali z geometričnimi - geodetskimi koordinatami. Naravne koordinate: astronomska geografska širina (Φ), astronomska geografska dolžina (Λ) in ortometrična višina (H) se nanašajo na težnostno polje. Geometrične koordinate: geodetska geografska širina (φ), geodetska geografska dolžina (λ) in elipsoidna višina (h) se nanašajo na referenčni elipsoid. Obe vrsti koordinat povezuje geodetski datum.

1.4.1 ASTROGEODETSKI DATUM (HORIZONTALNI GEODETSKI DATUM)

Parametri, ki določajo velikost, obliko, položaj in orientacijo referenčnega elipsoida v CT koordinatnem sistemu so parametri astrogeodetskega datuma oz. astrogeodetski datum. Le-tega določa 8 parametrov:

- trije parametri, ki določajo položaj izhodišča koordinatnega sistema,
- trije parametri, ki določajo orientacijo koordinatnega sistema,

- dva parametra, ki določata velikost in obliko rotacijskega elipsoida (a,f).

V praksi astrogeodetski datum določa naslednjih 8 parametrov:

- astronomska širina in astronomska dolžina izhodiščne točke astrogeodetske mreže (Φ_0, Λ_0),
- astronomski azimut A_0 na izhodiščni točki proti sosednji točki,
- vrednosti odklona navpičnice (ξ_0, η_0) v izhodiščni točki,
- vrednost geoidne ondulacije N_0 v izhodiščni točki,
- dva parametra, ki določata velikost in obliko rotacijskega elipsoida (a,f).

Pomen osmih datumskih parametrov astrogeodetskega datuma je naslednji: s koordinatama (Φ_0, Λ_0) je določena navpičnica izhodiščne točke astrogeodetske mreže, s komponentama odklona navpičnice ξ_0 in η_0 je normala elipsoida »pritrjena« na navpičnico v izhodiščni točki, s parametrom N_0 pa je referenčni elipsoid orientiran po višini. Med astronomskimi in geodetskimi koordinatami v izhodiščni točki tako veljajo zveze:

$$\xi_0 = \Phi_0 - \varphi_0 , \tag{1}$$
$$\eta_0 = (\Lambda_0 - \lambda_0)\cos\varphi_0 , \tag{2}$$
$$N_0 = h_0 - H_0 , \tag{3}$$

kjer je H_0 vrednost nadmorske (ortometrične) višine izhodiščne točke. Zgornje enačbe vzpostavljajo zvezo med normalo in navpičnico v izhodiščni točki mreže, vendar referenčni elipsoid lahko še kroži okrog normale v izhodiščni točki. To prostostno stopnjo v orientaciji referenčnega elipsoida odstranimo z opazovanim astronomskim azimutom A_0 v izhodiščni točki proti poljubni točki mreže. Med astronomskim azimutom A_0 in geodetskim azimutom α_0 mora v izhodiščni točki mreže veljati t.i. Laplaceova enačba azimuta:

$$A_0 - \alpha_0 = (\Lambda_0 - \lambda_0)\sin\varphi_0 . \tag{4}$$

Če v izhodiščni točki mreže veljata enačbi (1) in (2), je zagotovljena vzporednost koordinatnih osi CT in glavnih osi referenčnega elipsoida. Da bi se izognili prevelikemu vplivu pogreškov opazovanj na vzporednost osi koordinatnih sistemov, so v astrogeodetski mreži, na t.i. Laplaceovih točkah, opravljena dodatna astronomska opazovanja astronomskih koordinat in astronomskih azimutov. Dosežena vzporednost koordinatnih sistemov je odvisna od natančnosti opravljenih opazovanj.

Prednosti astrogeodetskega datuma so: dobro prileganje elipsoida in geoida ter zanesljivo merilo astrogeodetske mreže v bližini izhodiščne točke. Slabosti so: nezanesljiva povezava s težiščem Zemlje ter slabša povezava referenčnega elipsoida in geoida, ki sta povezana samo v izhodiščni točki. Zato v praksi z oddaljevanjem od izhodiščne točke nastopajo deformacije koordinat. Posledica je nujnost ločevanja horizontalnih in višinskih geodetskih mrež.

1.4.2 VIŠINSKI GEODETSKI DATUM

Višinski geodetski datum predstavlja množica parametrov, ki omogočajo določitev višin novih točk v višinskem koordinatnem sistemu. Višinski datum je povezan s t.i. srednjim nivojem morja. Srednji nivo morja predstavlja ekvipotencialna ploskev, ki poteka skozi izbrano izhodiščno točko - mareograf in predstavlja referenčno ploskev za določitev višin s postopki geometričnega nivelmana. V praksi običajno nadomešča eno samo višinsko referenčno točko množica višinskih referenčnih točk, ki pa vse ne ležijo na isti ekvipotencialni ploskvi. To dejstvo vodi do višinske referenčne ploskve, ki ni ekvipotencialna ploskev.

Astrogeodetski datum in višinski geodetski datum skupaj omogočata določitev položaja v trirazsežnem prostoru v klasični geodeziji.

1.5 Višinske referenčne ploskve

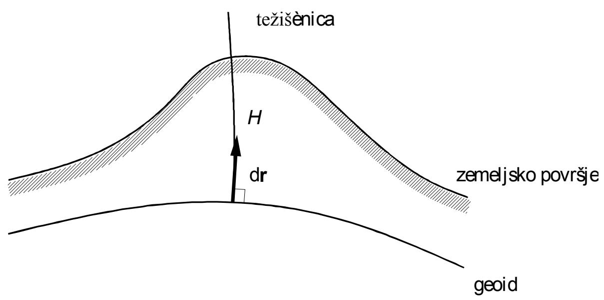
Ker astronomski koordinati Φ in Λ podajata položaj točke na ekvipotencialni ploskvi, potrebujemo za opis položaja v trirazsežnem prostoru še tretjo koordinato. Ta tretja koordinata je izbrana tako, da je pravokotna na ekvipotencialno ploskev. To koordinato imenujemo ortometrična višina *H*, če je višinska referenčna ploskev, na katero se nanaša, geoid.

1.5.1 TEŽNOSTNI POTENCIAL IN VIŠINA

Za matematično definicijo ortometrične višine uporabimo izraz:

$$dW = \mathrm{grad}\, W \cdot d\mathbf{r} \tag{5}$$

oziroma $dW = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$, kjer je W težnostni potencial, dW diferencial težnostnega potenciala W in $\mathbf{g}$ vektor težnosti (težnostnega pospeška). Če je vektor $d\mathbf{r}$ usmerjen vzdolž težiščnice v smeri »navzgor« od ekvipotencialne ploskve, velja enakost $|d\mathbf{r}| = dH$.



Slika 3: Višina točke

Zapišemo lahko $dW = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{g}| \cdot |d\mathbf{r}| \cos(\mathbf{g}, d\mathbf{r}) = g \cdot dH \cdot \cos(180^{\circ})$, oziroma

$$dW = -g \cdot dH, \tag{6}$$

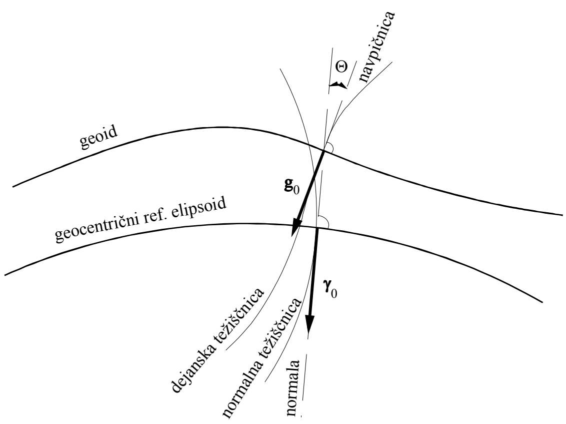
kar predstavlja osnovno višinsko enačbo. To enačbo običajno zapišemo v obliki:

$$dH = -\frac{dW}{g}. \tag{7}$$

Enačba (7) podaja višino glede na razliko potencialov in velikost težnostnega pospeška $|\mathbf{g}|$. Ker težnosti ne moremo opazovati v notranjosti Zemlje, uporabimo za velikost težnostnega pospeška v Zemljini notranjosti približne izraze. Od tod izhajajo tudi različni višinski sistemi in njim pripadajoče višinske referenčne ploskve.

1.5.2 GEOID IN ODKLON NAVPIČNICE

Geoid je ekvipotencialna ploskev, ki najbolje aproksimira srednji nivo morja. Po definiciji, ki jo je podal K. F. Gauss je geoid matematična oblika Zemlje. V splošnem poteka geoid pod kontinenti v globini, ki je enaka nadmorski višini zemeljske površine. Geoid lahko, do nekaj desetin metrov, aproksimiramo z rotacijskim geocentričnim elipsoidom, ki ga uporabljamo za definiranje normalnega težnostnega polja. Geoid obravnavamo s primerjavo med dejanskim težnostnim poljem in normalnim težnostnim poljem. Razliko (višino) med geocentričnim referenčnim elipsoidom in geoidom imenujemo geoidna višina oz. geoidna ondulacija (*N*). Absolutna geoidna višina se nanaša na »absolutni« - geocentrični elipsoid. Relativna geoidna višina se nanaša na referenčne elipsoide, ki niso geocentrični. Geoidna višina torej ni absolutna količina. Največje absolutne geoidne ondulacije znašajo do 100 m.

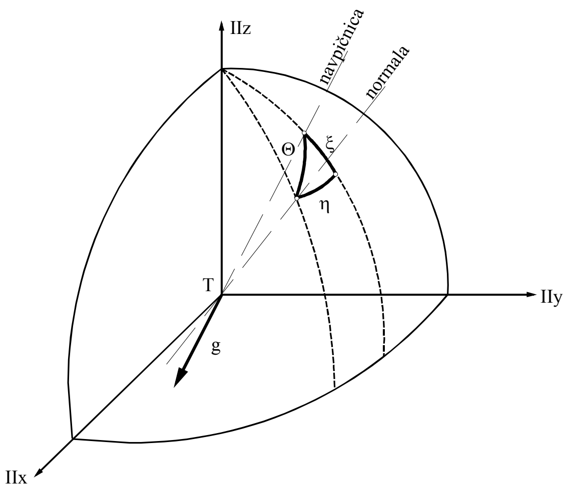


Slika 4: Odklon navpičnice

Za obravnavo nepravilnosti zemeljske težnosti uporabljamo vektorja dejanske težnosti $\mathbf{g}_0$ na geoidu in normalne težnosti $\boldsymbol{\gamma}_0$ na elipsoidu. Prostorski kot med $\boldsymbol{\gamma}_0$ in $\mathbf{g}_0$ je odklon navpičnice Θ. Odklon navpičnice je kot med dejansko težiščnico na geoidu in normalo na elipsoidu. Kakor geoidne višine so tudi odkloni navpičnice absolutni in relativni. Večje vrednosti odklona navpičnice lahko pričakujemo v goratih predelih, kjer lahko znašajo tudi do 1'. Ker je Θ prostorski kot, ga razstavimo na dve ortogonalni komponenti ξ in η, ki ju imenujemo komponenti odklona navpičnice. Komponenta odklona navpičnice ξ je projekcija odklona na meridiansko ravnino - meridianska komponenta odklona navpičnice; η je projekcija odklona navpičnice na ravnino I. vertikala - komponenta odklona v smeri I. vertikala. Predznak komponent odklona je po dogovoru pozitiven, če navpičnica poteka severno in vzhodno od normale. To velja za severno in južno zemeljsko poloblo.

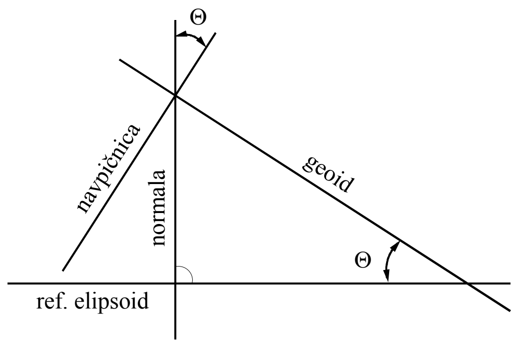
Odklon navpičnice povezuje smer normale in navpičnice v obravnavani točki. Povezuje torej astronomski in geodetski koordinati točke. Te zveze so dane z:

$$\xi = \Phi - \varphi\,;\ \eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi\,;\ \Theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\ . \tag{8}$$



Slika 5: Komponenti odklona navpičnice

Odklon navpičnice Θ predstavlja največji naklon geoida glede na referenčni elipsoid v obravnavani točki. Komponenta ξ predstavlja naklon geoida v smeri S-J, η pa naklon v smeri V-Z. Če je



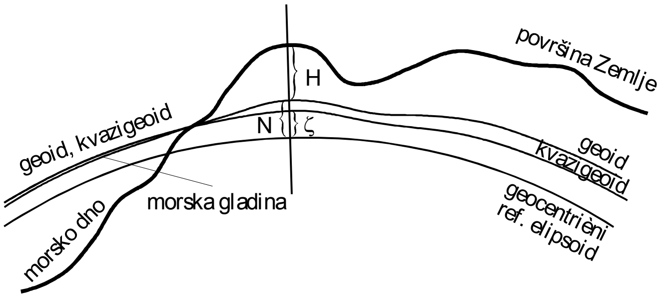
Slika 6: Odklon navpičnice in naklon geoida

geoid nagnjen proti severu, je komponenta ξ pozitivna in obratno, če je nagnjen proti vzhodu, je komponenta η pozitivna in obratno. Odklon navpičnice in tudi naklon geoida ε v azimutu α je dan z zvezo $\varepsilon = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha$.

1.5.3 KVAZIGEOID

Pri izračunu oblike ploskve geoida moramo predpostaviti porazdelitev gostote mas v vrhnjem sloju Zemlje. Ta predpostavka pa zmanjšuje zanesljivost rezultatov izračuna. Zaradi rešitve omenjenih problemov, ki otežujejo izračun ploskve geoida, je bila v geodetsko teorijo vpeljana še ena ploskev, ki jo imenujemo kvazigeoid. Kvazigeoid je ploskev, ki jo lahko izračunamo brez vseh predpostavk in kvazigeoidno višino ς lahko popolnoma natančno izračunamo. Geoid je izračunan iz dejanske težnosti na površini Zemlje, kvazigeoid pa iz normalne težnosti na površini referenčnega elipsoida.

Kvazigeoid je ploskev, ki se nahaja v globini, ki je enaka normalnim višinam točk zemeljskega površja. Je matematična ploskev, ki nima fizikalnega pomena. Sovpada z geoidom na morju, na kopnem se ti ploskvi lahko razlikujeta za nekaj metrov.



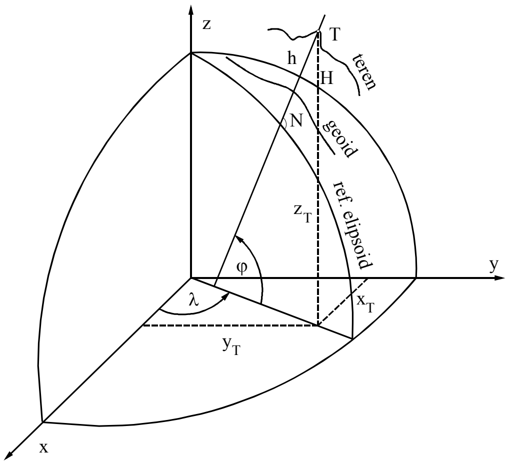
Slika 7: Geoid, kvazigeoid in referenčni elipsoid

Kljub svojim pomankljivostim je bil kvazigeoid izbran za višinsko referenčno ploskev v okviru novega evropskega višinskega referenčnega sistema EVRS.

1.5.4 PRERAČUN MED ELIPSOIDNIMI IN PRAVOKOTNIMI KOORDINATAMI

Trirazsežne koordinate točk lahko določimo samo na osnovi geodetskih koordinat. Geodetske koordinate (φ, λ ,*h*) točke lahko določimo na osnovi astronomskih koordinat točke (Φ, Λ) in vrednosti komponent odklona navpičnice (ξ, η). Elipsoidno višino točke (*h*) pridobimo na osnovi dane ortometrične (*H*) in geoidne višine (*N*) točke. Geodetske koordinate (φ, λ ,*h*) lahko pridobimo tudi neposredno z uporabo ustreznih merskih tehnik, kot je npr. GPS. Zveze med astronomskimi in geodetskimi koordinatami so dane z (8):

$$\varphi = \Phi - \xi\,;\ \lambda = \Lambda - \eta \sec\varphi\,;\ h = H + N. \tag{9}$$



Slika 8: Elipsoidne in pravokotne koordinate na rotacijskem elipsoidu

Zveza med pravokotnimi (*X,Y,Z*) in elipsoidnimi koordinatami (φ,λ,*h*) točke je za rotacijski elipsoid dana z izrazi:

$$X = (N + h)\cos\varphi\cos\lambda\,;\ \ Y = (N + h)\cos\varphi\sin\lambda\,;\ \ Z = \left(\frac{b^2}{a^2}N + h\right)\sin\varphi\,. \qquad (10)$$

$N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}$ je polmer ukrivljenosti prvega vertikala, a velika, b mala polos in e prva ekscentriciteta rotacijskega elipsoida.

1.5.5 PRERAČUN MED PRAVOKOTNIMI IN ELIPSOIDNIMI KOORDINATAMI

Za transformacijo med pravokotnimi in elipsoidnimi koordinatami obstaja več postopkov. Eden od teh postopkov je dan z naslednjimi izrazi:

$$\varphi = \arctan\frac{Z + e'^2\, b\sin^3\theta}{p - e^2 a\cos^3\theta}\,,\quad \lambda = \arctan\frac{Y}{X}\,,\quad h = \frac{p}{\cos\varphi} - N\,, \qquad (11)$$

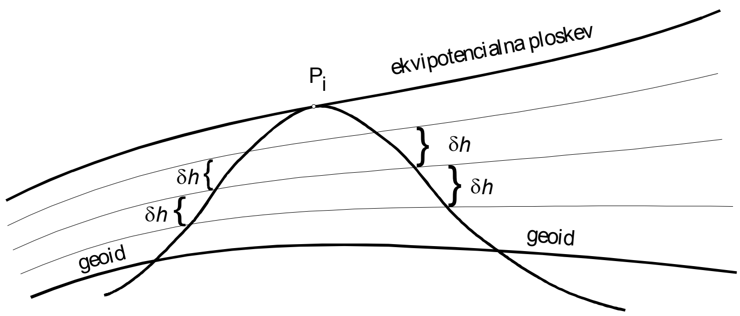
kjer so: $\theta = \arctan\dfrac{Za}{pb}$, $e'^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$, $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ in $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Ta postopek je v osnovi iterativen. Gornji izrazi so navidez direktni, vendar so le približni. So pa za vse praktične potrebe geodezije dovolj točni.

1.6 Sistemi višin v geodeziji

Zaradi omenjenih težav pri določitvi višin, ki izvirajo iz neznane velikosti težnostnega pospeška $|\mathbf{g}|$, je bilo uvedenih mnogo tipov višin, ki izpolnjujejo različne zahteve in se nanašajo na različne referenčne ploskve. Težave pri določanju višin v ravninskih področjih so bolj ali manj teoretične, za hribovita in gorata področja pa so te težave predvsem praktične. Za praktično uporabo je smiselna uvedba takšnih višin, ki predstavljajo »absolutne« višine točk. Zato so bile kot izhodišče absolutnih višin izbrane najnižje točke na zemeljski površini oziroma točke na morski površini. Odtod tudi izhaja naziv za absolutno višino »nadmorska« višina. Z absolutno višino so povezani tudi različni meteorološki parametri.

Višine določamo s postopki niveliranja in trigonometričnega višinomerstva. Ti merski operaciji izvajamo v težnostnem polju Zemlje. Zato so rezultati tovrstnih opazovanj obremenjeni z geometrijskimi lastnostmi težnostnega polja.



Slika 9: Določitev višine točke P_i

Oglejmo si to na primeru določitve višine točke P_i (slika 9). Prvi nivelmanski vlak poteka od geoida do točke P_i z leve strani gore in drugi z desne. Za vsako postavitev instrumenta je višinska razlika med lato zadaj in lato spredaj δh. Višina točke P_i nad geoidom je nato vsota višinskih razlik δh za nivelman na levi in na desni strani gore. Ti dve vsoti sta različni, ker je na desni strani gore večja višinska razlika δh med ekvipotencialnimi ploskvami kot na levi strani. Katera višina točke P_i je torej prava? Dvoumno situacijo, ki nastane, lahko odstranimo samo s pretvorbo rezultatov izmere in izračuna višine točke, ki so odvisni od poti, v rezultate, ki so neodvisni od poti določitve višine točke. To lahko storimo na več načinov.

1.6.1 GEOPOTENCIALNE KOTE

Razlika težnostnih potencialov dveh bližnjih ekvipotencialnih ploskev je dana z izrazom $\delta W \cong -g\delta h$. Ker poteka skozi vsako točko samo ena ekvipotencialna ploskev, pripada tej točki samo ena vrednost težnostnega potenciala W. Težnostni potencial tako predstavlja eno od možnosti določitve enolične višine točke. Če z merskim postopkom določamo razmik med ekvipotencialnimi ploskvami $\delta h \rightarrow \delta l$ in če poznamo vrednost težnosti na istem mestu, lahko določimo razliko potencialov δW iz izraza $\delta W \cong -g\delta h$. Namesto potenciala W_i točke P_i v geodeziji uporabljamo geopotencialno število (koto) C_i, ki je definirana kot negativna razlika potencialov v točki P_i in na geoidu:

$$C_i = -(W_i - W_0) = \int_{P_0}^{P_i} g \cdot dl = \int_{P_0}^{P_i} g' \cdot dh' , \qquad (12)$$

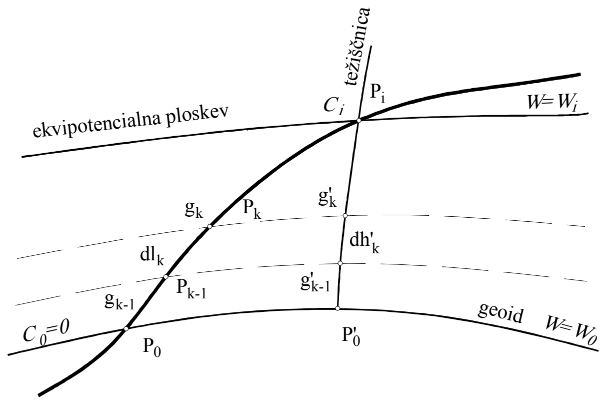
kjer integriramo ali po površini (dl) med geoidom in točko P_i ali vzdolž težiščnice (dh') do točke P_i (slika 10). Razlika geopotencialnih kot ΔC_{ij} med točkama P_i in P_j je sedaj:

$$\Delta C_{ij} = \int_{P_i}^{P_j} g \cdot dl . \qquad (13)$$

Enota geopotencialne kote je kilogalmeter oziroma $1 \mathrm{kGalm} = 10\, \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2} = 1\, \mathrm{g.p.u.}$ Enota je izbrana tako, da je numerična vrednost geopotencialne kote približno enaka višini točke nad nivojem morja v metrih:

$$C \cong 0.98 H , \qquad (14)$$

kjer je H višina točke nad geoidom. Geopotencialna kota je za vsako točko enolična. Ker je težnostno polje brez vrtincev, je integral po zaključeni krivulji enak nič, kar pa ne velja za nivelirane višinske razlike. Geopotencialne kote so pozitivne nad geoidom, enake nič na geoidu, negativne pod geoidom in konstantne na ekvipotencialni ploskvi.



Slika 10: Določitev višin z geometričnim nivelmanom

V praksi ne poznamo niti *l*, niti *g* kot zvezne funkcije položaja, zato integralov (12) in (13) ne moremo rešiti analitično. Zato uporabimo končno število vrednosti za *g* in *dl*, opazovanih v nivelmanskem vlaku. Imamo torej:

$$\Delta C_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \overline{g}_k \delta l_k \,, \tag{15}$$

kjer je $\overline{g}_k = \frac{1}{2}(g_{k-1} + g_k)$, torej povprečna vrednost težnosti med točkama P_{k-1} in P_k, δl_k je opazovana višinska razlika med točkama P_{k-1} in P_k, g_k je opazovana vrednost težnosti v točki P_k. V praksi pa težnosti ni potrebno opazovati v vsaki točki - na vsakem reperju nivelmanskega vlaka.

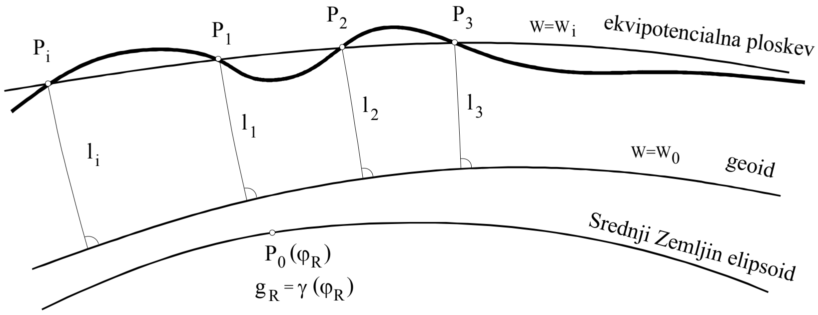
Gepotencialna kota ni višina v geometrijskem smislu in nima geometrijskega pomena. Pomembna je predvsem v raziskovanju težnostnega polja Zemlje in je osnova za izračun višine v vseh sistemih višin, ki imajo fizikalni pomen.

1.6.2 DINAMIČNE VIŠINE

Za odstranitev težav, povezanih z geopotencialnimi kotami, ki niso dane v dolžinski meri, so bile uvedene dinamične višine H^D, ki jih pridobimo tako, da geopotencialne kote delimo s konstantno referenčno težnostjo g_R:

$$H_i^D = \frac{C_i}{g_R} \,. \tag{16}$$

Za g_R privzamemo vrednost normalne težnosti na srednjem Zemljinem elipsoidu za srednjo geografsko širino φ_R področja, tako da predstavlja g_R približno povprečno normalno težnost za obravnavano področje. Referenčno težnost lahko obravnavamo kot faktor (merilo), s katerim geopotencialno koto v enotah potenciala pretvorimo v dolžinsko enoto. Referenčna ploskev za dinamične višine je geoid.



Slika 11: Dinamične višine

Dinamična višina ni geometrijska razdalja med geoidom in točko. Velja torej $l_i \neq l_1 \neq l_2 \neq l_3$ in pa $H_i^D = H_1^D = H_2^D = H_3^D$. Ker so dinamične višine točk na ekvipotencialni ploskvi enake, so dinamične višine uporabne enako kot geopotencialne kote v različnih praktičnih nalogah, kjer potrebujemo fizično poznavanje okolja (hidrodinamične naloge). Ko imamo nivelirane višinske razlike Δl_{ij}, pridobimo višinsko razliko v sistemu dinamičnih višin tako, da jim prištejemo t.i. dinamični popravek DP_{ij}, ki je dan z:

$$DP_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \frac{\overline{g}_k - g_R}{g_R} \delta l_k \,, \tag{17}$$

kjer je $\overline{g}_k = \frac{1}{2}(g_i + g_j)$ in $\delta l_k = \Delta l_{ij}$. Enako kot pri dinamičnih višinah tudi sedaj ni potrebno opazovati težnosti na vsakem reperju.

Na isti ekvipotencialni ploskvi imajo dinamične višine enako vrednost. Dinamični popravek je lahko dokaj velik in lahko znaša do nekaj metrov na 1000 m višinske razlike. Zaradi velikih popravkov dinamične višine, skupaj z geopotencialnimi kotami, niso primerne za praktično uporabo.

1.6.3 ORTOMETRIČNE VIŠINE

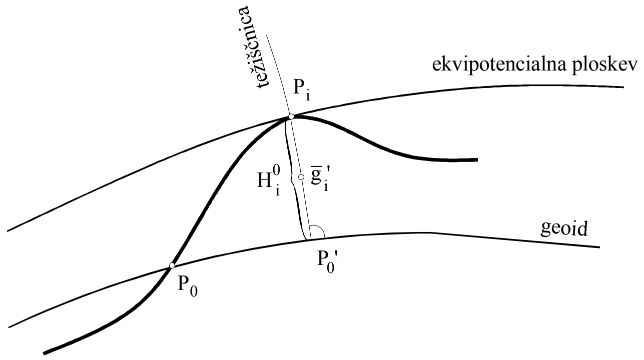
Ortometrična višina H_i^O točke $\mathrm{P_i}$ je definirana kot dolžina težiščnice med geoidom in točko $\mathrm{P_i}$. Enačbo (12) lahko sedaj zapišemo:

$$C_i = -(W_i - W_0) = \int_{\mathrm{P_0}'}^{\mathrm{P_i}} g_i' \cdot dh' = h' \frac{1}{h'} \int_{\mathrm{P_0}'}^{\mathrm{P_i}} g_i' \cdot dh' = h' \cdot \overline{g}_i' = \overline{g}_i' \cdot H_i^O \,, \tag{18}$$

kjer je h' dolžina težiščnice med točko $\mathrm{P_0}'$ na geoidu in točko $\mathrm{P_i}$ na površini Zemlje, ki predstavlja ortometrično višino H_i^O točke $\mathrm{P_i}$ (slika 10). Iz izraza (18) izhaja izraz za ortometrično višino točke $\mathrm{P_i}$:

$$H_i^O = \frac{C_i}{\overline{g}_i'} = \frac{1}{\overline{g}_i'} \int_{P_0'}^{P_i} g_i' \cdot dH \,. \qquad (19)$$

Obstaja več približnih izrazov za določitev vrednosti $\overline{g}_i'$, od katerih vsak zagotavlja posebno vrsto ortometričnih višin, ki jih imenujemo po avtorjih (Helmert, Mader, Niethamer). V praksi se najpogosteje uporabljajo Helmertove ortometrične višine, kjer je srednja vrednost težnosti g_i^H določena z izrazom $g_i^H = g_i + 0.0424 H_i$ in je g_i težnost v točki P_i na površini Zemlje.



Slika 12: Ortometrične višine

Za pretvorbo višinskih razlik, določenih z geometričnim nivelmanom, v višinske razlike v sistemu ortometričnih višin, dodamo niveliranim višinskim razlikam t.i. ortometrični popravek OP_{ij}:

$$OP_{ij} = \sum_{k=A}^{B} \frac{g - g_R}{g_R} \delta l_k + \frac{\overline{g}_i' - g_R}{g_R} H_i - \frac{\overline{g}_j' - g_R}{g_R} H_j \quad , \qquad (20)$$

kjer je $g = \frac{g_i + g_j}{2}$ srednja vrednost težnosti, opazovane na točkah P_i in P_j, ter $\overline{g}_i'$ in $\overline{g}_j'$ srednji vrednosti težnosti vzdolž težiščnic točk P_i in P_j; g_R je enak kot v enačbi (16), H_i in H_j sta ortometrični višini točk P_i in P_j, ki jih določamo, kar pomeni, da mora biti izračun otometričnega popravka iterativen.

Ortometrične višine so naravne nadmorske višine oziroma višine nad geoidom. Izračun ortometričnih višin je računsko dokaj obsežen. Poenostavitev predstavljajo Helmertove ortometrične višine, ki ustrezajo večini praktičnih nalog. Ortometrični popravek je dokaj majhen in znaša največ nekaj dm na 1000 m višinske razlike. Glavna pomanjkljivost ortometričnih višin je, da ne morejo biti nikoli določene natančno. Točke na isti ekvipotencialni ploskvi zato v splošnem nimajo enakih ortometričnih višin.

1.6.4 NORMALNE VIŠINE

Ker eksaktnih ortometričnih višin ni nikoli mogoče določiti, so bile predlagane druge rešitve. Široko podporo je dobila ideja ruskega geofizika Molodenskega, ki je predlagal uvedbo normalnih višin H^N. Normalna višina je definirana kot:

$$H_i^N = \frac{C_i}{\overline{\gamma}_i}, \tag{21}$$

kjer je $\overline{\gamma}_i$ srednja vrednost normalne težnosti na normali točke.

Podobno kot v primeru dinamičnih in ortometričnih višin uporabljamo za praktičen preračun geometrično določenih višinskih razlik v sistem normalnih višin t.i. normalni popravek NP_{ij}:

$$NP_{ij} = \sum_{k=i}^{j} \frac{g-\gamma_0}{\gamma_0}\delta l_k + \frac{\overline{\gamma}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i^N - \frac{\overline{\gamma}_j - \gamma_0}{\gamma_0} H_j^N , \tag{22}$$

kjer je $g = \frac{1}{2}(g_i + g_j)$ srednja vrednost težnosti, opazovana na točkah P_i in P_j ter γ_0 poljubna konstanta, npr. normalna težnost za $\varphi = 45^\circ$.

Normalne višine nimajo fizikalnega in geometrijskega pomena, ker točke na isti nivojski ploskvi nimajo enakih normalnih višin. Odvisne so od izbranega referenčnega elipsoida in so lahko izračunane eksaktno. Normalni popravek je po velikosti primerljiv z ortometričnim popravkom. V praksi se veliko uporabljajo. Referenčna ploskev za normalne višine je kvazigeoid.

1.6.5 PRIMERJAVA VIŠINSKIH SISTEMOV

Na osnovi geopotencialne kote C so definirani različni tipi višin glede na izraz $H = \frac{C}{g}$, kjer je tip višine odvisen od izbrane vrednosti težnosti v imenovalcu izraza za H:

- dinamična višina: $g = g_R = \text{konst.}$,
- ortometrična višina: $g = \overline{g}_i'$,
- normalna višina: $g = \overline{\gamma}_i$.

Pojav cele množice višinskih sistemov je torej povzročilo dejstvo, da je višinski sistem odvisen samo od izbrane vrednosti težnosti. Problem, ki je skupen vsem trem višinskim sistemom: dinamičnemu, ortometričnemu in normalnemu, je pomanjkanje podatkov o težnosti za pridobitev ustreznih popravkov geometrijsko pridobljenih višinskih razlik. Ta problem je bil delno odpravljen z uvedbo normalne težnosti na mestu dejanske težnosti. Višinske razlike, dane v dinamičnih, ortometričnih ali normalnih višinah, ki so določene z normalno težnostjo, se od višinskih razlik, določenih z dejansko težnostjo, v splošnem ne razlikujejo dosti. V splošnem znašajo razlike do 20 cm na km višinske razlike.

1.6.6 EVROPSKI VIŠINSKI REFERENČNI SISTEM

Podobno kot je bil namen vzpostavitve koordinatnega sistema ETRS poenotenje astrogeodetskih datumov v Evropi, je zaradi množice višinskih sistemov z različnimi višinskimi izhodišči ter uporabo različnih tipov višin definiran evropski višinski referenčni sistem EVRS ter praktična realizacija tega sistema pod imenom EVRF2000 (European Vertical Reference Frame 2000). EVRS temelji na težnosti, tako da je to sistem, v katerem imajo višine fizikalni pomen.

EVRS je definiran z višinskim datumom EVD (European Vertical Datum), ki je definiran z vrednostjo težnostnega potenciala W_0 ekvipotencialne ploskve mareografa v Amsterdamu - NAP (Normaal Amsterdams Peil). Višina v EVRS je definirana kot razlika težnostnih potencialov ΔW_P obravnavane točke P in NAP. Višinski sistem je torej definiran na osnovi geopotencialnih kot $C_P = \Delta W_P = W_P - W_0$. Geopotencialne kote omogočajo izračun normalnih višin, ki predstavljajo sistem višin, v katerem so dane višine v EVRS. Praktično je EVRS realiziran z geopotencialnimi kotami višinskih točk v okviru evropske nivelmanske mreže UELN (United European Levelling Network), ki pokriva območje Severne, Srednje in Zahodne Evrope.

1.7 Gravimetrični sistem

Kot smo videli, je osnova za določitev višine točke, poleg višinskih razlik točk, pridobljenih z geometričnim nivelmanom, pospešek sile teže - težnost. Z gravimetričnimi meritvami določamo velikost vektorja pospeška sile teže. Sila teže je rezultanta centrifugalne in gravitacijske sile v obravnavani točki. Naloga gravimetrije je določitev jakosti težnostnega polja Zemlje kot funkcije položaja in časa z merjenjem velikosti in gradienta težnosti.

Enota za težnost v SI sistemu merskih enot je ms^{-2}. Za prikaz odstopanj dejanske težnosti od polja normalne težnosti se uporabljata manjši enoti: $1\mu\mathrm{ms}^{-2} = 10^{-6}\mathrm{ms}^{-2}$, $1\mathrm{nms}^{-2} = 10^{-9}\mathrm{ms}^{-2}$. V geodeziji oz. gravimetriji sta še vedno v rabi pomožni enoti 1 $\mathrm{mGal} = 10^{-5}\,\mathrm{ms}^{-2}$, $1\ \mu\mathrm{Gal} = 10^{-8}\,\mathrm{ms}^{-2}$. Izpeljani sta iz enote Gal, poimenovani po G. Galileu ($1\ \mathrm{Gal} = 1\ \mathrm{cm\ s}^{-2}$). Te enote v uradni rabi niso dovoljene, vendar se v strokovnem in znanstvenem komuniciranju še vedno uporabljajo.

Uporaba gravimetričnih meritev na večjih območjih zahteva, da podatki meritev ne vsebujejo sistematičnih pogreškov. Meritve težnosti je tako potrebno vezati na neko referenčno vrednost oz. jih podati v nekem referenčnem sistemu. V zgodovini gravimetrije je bil sprva v veljavi potsdamski težnostni sistem (1909 – 1971). Temeljil je na absolutni določitvi vrednosti težnega pospeška na Geodetskem inštitutu v Potsdamu leta 1900. S kasnejšimi opazovanji so ugotovili zamik v izhodišču tega sistema; absolutna vrednost $|\mathbf{g}|$ je večja za $+14$ mGal. Med leti 1950 in 1970 je bila zasnovana nova globalna gravimetrična mreža točk t.i. International Gravity Standardization Net 1971 (I.G.S.N.71). Izhodišče novega sistema predstavlja 10 absolutnih meritev na osmih točkah, določenih z novo generacijo absolutnih (balističnih) gravimetrov. Zaradi vse večjega števila razpoložljivih absolutnih gravimetrov se po letu 1983 vzpostavlja t.i. »International Absolute Gravity Basestation Network«, IAGBN. Dejansko predstavlja globalno gravimetrično mrežo 0. reda. Vsebuje 36 globalno razporejenih osnovnih točk (natančnost določitve g-ja je velikostnega reda μGal). Glavni namen te mreže je nadziranje trenutnih sprememb težnosti v globalnem smislu in kontrola težnosti na točkah regionalnih gravimetričnih mrež.

Enotna evropska gravimetrična mreža 1994 EUGN94 (Unified European Gravity Network 1994) predstavlja poskus vzpostavitve evropske gravimetrične mreže, ki bi z večjo natančnostjo in homogenostjo dopolnila IGSN71. Trenutno mreža vsebuje okoli 500 točk v 11 evropskih državah. Dosežena natančnost opazovane težnosti v tej mreži je okoli 20 μGal.

1.7.1 GRAVIMETRIČNA IZMERA

Gravimetrično izmero ločimo glede na medsebojno oddaljenost izmeritvenih točk in glede na zahtevano natančnost izmere, kot jo definira namen izvedbe izmere. Točke z izmerjenimi vrednostmi težnega pospeška so povezane v gravimetrične mreže. Te lahko razdelimo na globalne, regionalne in lokalne mreže gravimetričnih kontrolnih točk. Detajlna gravimetrična izmera za potrebe geodetskih, geodinamičnih in geofizikalnih raziskav se navezuje na te mreže.

Metode merjenja težnosti lahko razdelimo na dinamične in statične metode. Dinamične metode obravnavajo gibanje telesa pod vplivom sile teže. Pri teh metodah neposredno merimo čas, ki ga potrebuje telo, da se premakne iz enega položaja v drugega. Statične metode obravnavajo spremembo ravnovesja telesa pod vplivom sile teže in njej nasprotne sile. Neposredno merimo dolžinski premik ali spremembo kota telesa konstantne mase. Nasprotno delujoča sila je v tem primeru lahko sila prožnosti vzmeti, torzija nitke, membrane itd.

Instrumente za merjenje težnega pospeška imenujemo gravimetri. Ne glede na to, katero metodo uporabljamo, lahko določamo absolutne in relativne vrednosti težnosti. Absolutne meritve pomenijo določitev težnosti v polni vrednosti, relativne meritve pa nam dajo razlike vrednosti težnosti med dvema točkama. Z dinamičnimi metodami lahko določamo absolutne in relativne vrednosti težnosti. Pri absolutnih določitvah vrednosti težnosti je potrebno izmeriti poleg časa še razdaljo (dolžino nihala, oz. dolžino poti prostega pada). S statičnimi metodami določamo samo relativne vrednosti težnosti.

Absolutni gravimetri za dinamične metode so sestavljeni kot nihala ali pa kot t.i. balistični instrumenti (gravimetri na principu prostega pada telesa v vakuumu). Danes se skoraj izključno uporabljajo gravimetri na principu prostega pada. Natančnost absolutne določitve vrednosti težnosti s prostim padom znaša od $\pm 10^{-7}$ do $\pm 10^{-9}$g.

Pri relativnih meritvah težnosti čutilo (senzor) gravimetra omogoča posredno ali neposredno opazovanje ene od dveh temeljnih količin pospeška, časa ali dolžine. Relativne meritve težnosti lahko opravimo z dinamičnimi in statičnimi metodami. Za dinamične relativne meritve se uporabljajo gravimetri na principu nihala. Slonijo na merjenju nihajnih časov nihala s konstantno dolžino na dveh opazovališčih. Mehanski gravimetri omogočajo relativne meritve težnosti s statičnimi metodami. Čutila gravimetrov predstavlja sistem vzmeti, ročic, torzijskih elementov ipd. Deformacija vzmeti nastane pod vplivom teže uteži, ki pa je odvisna od sile teže. Prirastek deformacije med dvema točkama je merilo spremembe sile teže (težnosti), to pa je dejansko količina, ki jo merimo.

Rezultati merjenja z gravimetrom se izražajo v različnih enotah merilne naprave (čutila). Da bi te enote lahko pretvorili v enote težnega pospeška, je potrebno opraviti kalibracijo gravimetra. Kalibracija je postopek določevanja t.i. kalibracijske funkcije, ki omogoča omenjeno pretvorbo merskih enot.

Zaradi sprememb zunanje temperature in pritiska se spreminjajo lastnosti čutila gravimetra oz. prihaja do sprememb v ravnotežju sistema vzmeti. Zaradi tega se spreminja ničelni položaj čutila (angl. *zero position*), kar je znano kot tek (hod) gravimetra (angl. *gravimeter drift*). Z načinom dela lahko upoštevamo vpliv hoda na vrednosti opazovanj.

Natančnost relativne določitve vrednosti težnega pospeška je od 10 μGal do 30 μGal. Relativne meritve lahko izvajamo povsod. Navadni gravimetri se uporabljajo za meritve na kopnem in v podzemskih prostorih in vrtinah. Za izmero na morju in v zraku se uporabljajo posebej prirejeni gravimetri. Natančnost teh meritev je manjša od omenjene.

2. GEODETSKE MREŽE

V geodeziji določamo koordinate fizično stabiliziranih geodetskih točk v izbranem koordinatnem sistemu z namenom materializacije le-tega. Ker koordinat točk ne moremo določiti neposredno, jih določamo posredno, na osnovi opazovanj ustreznih geometrijskih in fizikalnih količin. Različne opazovane količine so različno obremenjene z vplivi merskega instrumenta, merskega postopka, medija, v katerem izvajamo opazovanja, geometrijskih lastnosti težnostnega polja ali dimenzije prostora, v katerem želimo materializirati koordinatni sistem, je potrebno opazovanja za vrednosti naštetih vplivov ustrezno popraviti.

Potreba za vzpostavitev geodetske mreže izhaja iz potrebe za zagotovitev nadštevilnosti opazovanj v matematičnem modelu za izravnavo opazovanj. Z opazovanji večjega števila količin, kot jih potrebujemo za pridobitev enolične ocene vseh neznank, vključenih v matematični model, pridobimo sredstvo, s katerim je možno vrednotenje kakovosti opravljenih opazovanj kot tudi neznank v modelu.

Geodetska mreža je definirana kot množica:

- geodetskih točk, ki so med seboj povezane v geometrijsko figuro, tako da odstranitev ene točke iz množice vpliva na geometrijo (dolžine, smeri, koordinatne razlike, koordinate,...) celotne figure,
- povezav med geodetskimi točkami, s katerimi je podana omenjena odvisnost, ki jih predstavljajo izravnane dolžine, smeri, koti, koordinatne razlike,... med točkami geodetske mreže

Triangulacijsko mrežo tako sestavljajo geodetske točke z določenimi horizontalnimi koordinatami in povezavami, ki jih predstavljajo smeri, koti in/ali dolžine med točkami mreže. Nivelmansko mrežo sestavlja mreža nivelmanskih linij med točkami. Gravimetrično mrežo sestavljajo gravimetrične točke, opazovane zaporedoma, skupaj s povezavami med njimi, v zaporedju, kot so bile opazovane. GPS mrežo sestavljajo bazni vektorji, ki povezujejo točke mreže.

Geodetske mreže vključujejo samo zaključene like, kar pomeni, da so vse povezave navezane na vsaj dve točki, da je vsaka točka povezana v mrežo z vsaj dvema različnima povezavama. To izhaja iz pogoja, da so vrednosti količin, ki so povezane z vsako točko, med seboj odvisne.

Pri določitvi koordinat točk imamo možnost določitve koordinat točk v eno-, dvo- ali trirazsežnem koordinatnem sistemu. Hkratno določitev koordinat v trirazsežnem koordinatnem sistemu s terestričnimi opazovanji otežuje nepoznavanje geometrijskih lastnosti težnostnega polja in atmosferske refrakcije, zato v tem primeru ločeno določamo horizontalne koordinate in višino. V primeru GPS opazovanj so rezultat obdelave le-teh trirazsežni bazni vektorji, ki omogočajo pridobitev položajev točk v trirazsežnem koordinatnem sistemu.

2.1 Datum geodetske mreže

V državni geodetski mreži imamo vedno na razpolago dane točke. S položaji teh točk, ki ostanejo v postopku izravnave opazovanj v geodetski mreži nespremenjeni, imamo definiran tudi datum geodetske mreže. Datum geodetske mreže je tako določen s parametri, ki definirajo koordinatni sistem. V primeru danih točk se torej s problemom datuma geodetske mreže ni potrebno posebej ukvarjati.

V povezavi z datumom geodetske mreže pa se pojavlja še en problem. To je »predoločenost« datuma, kar pomeni, da je datum mreže določen z več količinami, kot jih je nujno potrebnih. V tem primeru je geometrija mreže obremenjena z nepravilnostmi relativnih položajev danih točk v mreži. Posledica je težavno ocenjevanje natančnosti geodetske mreže. Problem predoločenega datuma geodetske mreže se pojavlja pri uporabi nevzdrževane geodetske mreže.

2.1.1 DATUMSKE INFORMACIJE GEODETSKIH OPAZOVANJ

V geodeziji izvajamo opazovanja, ki vsebujejo različne informacije o geodetskem datumu. Horizontalne smeri in koti ne vsebujejo datumskih informacij, izmerjene dolžine zagotavljajo merilo. Azimut, določen na osnovi astronomskih ali GPS opazovanj, zagotavlja orientacijo zveznice dveh točk glede na astronomski ali geodetski sever. Zenitne razdalje zagotavljajo rotacijo zveznice dveh točk glede na astronomski sever in vzhod; z redukcijo na normalo zagotavljajo zasuke glede na geodetski sever in vzhod.

Opazovana količina	Datumski parametri						
	Premik			Zasuk			Merilo
	T_x	T_y	T_z	ω_X	ω_Y	ω_Z	s
Dolžina	–	–	–	–	–	–	+
Horizontalni kot/smer	–	–	–	–	–	–	–
Azimut	–	–	–	–	–	+	–
Zenitna razdalja	–	–	–	+	+	–	–
Astronomske koordinate	+	+	–	–	–	+	+
Fazna GPS opazovanja	–	–	–	–	–	–	–
Kodna GPS opazovanja	–	–	–	–	–	–	+
Koordinate na osnovi GPS opazovanj	+	+	+	+	+	+	+
Relativne trirazsežne koordinate (GPS)	–	–	–	+	+	+	+
Relativne dvorazsežne koordinate	–	–	–	–	–	+	+
Višinske razlike	–	–	–	–	+	+	+

Tabela 1: Datumske informacije nekaterih geodetskih opazovanj

Absolutne koordinate, pridobljene na osnovi GPS opazovanj, zagotavljajo 7 datumskih parametrov. V geodetski praksi pa uporabljamo bazne vektorje - relativne koordinate dveh točk, ki zagotavljajo orientacijo baznega vektorja in merilo le-tega. Datumske informacije najpogostejših geodetskih opazovanj podajamo v tabeli 1.

2.2 Terestrične geodetske mreže

Ne glede na razsežnost prostora, v katerem določamo koordinate točk, in ne glede na natančnost položajev točk, opazovanja vedno popravimo za znane vrednosti pogreškov instrumenta in meteorološke vplive.

Za izračun trirazsežnih koordinat točk na osnovi terestričnih opazovanj popravimo opazovanja za vplive težnostnega polja in sestavimo t.i. trirazsežni elipsoidni model, v okviru katerega vzpostavimo zvezo med opazovanimi in neznanimi količinami. V primeru določanja dvorazsežnih koordinat točk reduciramo opazovanja na datumsko ploskev. Pri redukciji opazovanj na površino referenčnega rotacijskega elipsoida moramo upoštevati dve skupini redukcij, ki imata izvor v zemeljskem težnostnem polju in v geometriji rotacijskega elipsoida. Obe vrsti redukcij sta funkciji koordinat stojiščne točke. Sestavimo t.i. horizontalni elipsoidni model, ki predstavlja zvezo med opazovanji in neznankami. Temu modelu je enakovreden, vendar je za uporabo enostavnejši, t.i. model na ravnini konformne kartografske projekcije. V višinskih mrežah moramo z uporabo ustreznih popravkov (dinamičnega, ortometričnega ali normalnega) z geometričnim nivelmanom pridobljene višinske razlike med točkami preračunati v višinske razlike ustreznega tipa višin.

2.2.1 POPRAVKI TERESTRIČNIH OPAZOVANJ ZARADI GEOMETRIJE TEŽNOSTNEGA POLJA

Ko smo vrednosti opazovanih količin popravili za meteorološke in instrumentalne vplive, jih moramo popraviti za vpliv geometrije težnostnega polja na opazovanja. Terestrična opazovanja, ki se nanašajo na LA koordinatni sistem, moramo najprej reducirati v lokalni geodetski (LG) koordinatni sistem. Astronomski azimut preračunamo v geodetski azimut s t.i. popravkom astronomskega azimuta zaradi odklona navpičnice. Opazovane smeri popravljamo na enak način kot astronomske azimute, ker se prav tako nanašajo na navpičnico v opazovani točki. Izmerjeni horizontalni kot pa je dan z razliko dveh opazovanih smeri. Zenitno razdaljo, ki se nanaša na navpičnico, preračunamo na normalo z znano vrednostjo odklona navpičnice, s katero lahko nato določamo višinske razlike v sistemu elipsoidnih višin. Opazovanih dolžin posebej ne popravljamo za vrednosti vplivov težnostnega polja, z izjemo uporabe geoidnih višin, ki jih potrebujemo za določitev elipsoidnih višin točk za redukcijo dolžin na površino referenčnega elipsoida. Z ustreznimi popravki moramo nivelirane višinske razlike pripraviti za vključitev v ustrezen višinski sistem.

2.2.2 POPRAVKI TERESTRIČNIH OPAZOVANJ ZARADI GEOMETRIJE ROTACIJSKEGA ELIPSOIDA

Ko smo opazovane količine reducirali na normalo, smo jih morali reducirati še na površino datumske ploskve (referenčnega elipsoida). Redukcijo geodetskega azimuta na površino referenčnega elipsoida, ki je odvisna od višine opazovane točke, imenujemo tudi azimutalna redukcija. Zaradi dvojnosti normalnih presekov reduciramo azimuta z normalnega preseka še v geodetsko krivuljo. Izmerjeni horizontalni kot reduciramo na elipsoid, tako da uporabimo redukcije opazovanega azimuta za dve orientirani smeri.

Izmerjeni prostorski dolžini moramo določiti pripadajočo dolžino geodetske krivulje na referenčnem elipsoidu, za kar moramo poznati elipsoidni višini točk.

2.2.3 PROJEKCIJSKI POPRAVKI TERESTRIČNIH OPAZOVANJ

Druga možnost izravnave horizontalne geodetske mreže je izravnava opazovanj v ravnini izbrane kartografske projekcije. Med kartografskimi projekcijami so posebno pomembne konformne kartografske projekcije. V Sloveniji je v veljavi Gauss-Krügerjeva konformna kartografska projekcija. Pri prehodu z rotacijskega elipsoida v ravnino kartografske projekcije je potrebno poleg koordinat točk preračunati tudi opazovane količine. Nalogo izravnave opazovanj rešimo na projekcijski ravnini s popravljenimi vrednostmi opazovanj.

V splošnem je vseeno katerega od modelov terestričnih opazovanj uporabimo (trirazsežnega elipsoidnega, horizontalnega elipsoidnega ali ravninski model konformne kartografske projekcije), ker vsi modeli zagotavljajo enake vrednosti koordinat točk. Kovariančno matriko opazovanj sestavimo na osnovi ocenjenih varianc in kovarianc opravljenih opazovanj. Pri tem privzamemo za varianco reduciranih opazovanj enake vrednosti, kot smo jih dodelili neposredno opazovanim količinam. Varianc ali uteži opazovanj torej ne reduciramo na npr. referenčno računsko ploskev. Rezultat izravnave opazovanj v geodetski mreži so ocenjene vrednosti koordinatnih in drugih v model vključenih neznank s pripadajočo kovariančno matriko.

2.3 GPS geodetska mreža

Obdelavo GPS opazovanj za namen pridobitve položajev točk v okviru GPS mreže izvedemo v dveh delih. Prvi del predstavlja obdelava GPS opazovanj, pridobljenih v okviru posamezne serije ali celotne GPS izmere. Ta korak lahko izvedemo z obravnavo posameznih vektorjev ali z istočasno obdelavo vseh opazovanj v mreži. Običajno izvedemo ta del obdelave GPS opazovanj s skupno izravnavo vseh istočasno pridobljenih opazovanj. Drugi del obdelave GPS opazovanj predstavlja izravnava baznih vektorjev v okviru GPS mreže, kjer komponente baznih vektorjev obravnavamo kot opazovanja.

Obdelava podatkov GPS opazovanj je odvisna od metode GPS izmere. Za potrebe vzpostavitve geodetskih mrež uporabljamo skoraj izključno statično metodo izmere. Za geodetsko GPS izmero potrebujemo najmanj dva GPS sprejemnika. GPS izmero večjega števila točk običajno izvajamo z majhnim številom sprejemnikov. To pomeni, da jo moramo opraviti v več serijah. Na osnovi opazovanj, opravljenih v posameznih serijah, pridobivamo bazne vektorje med pari točk ali bazne vektorje med GPS sprejemniki med vsemi točkami opazovanimi v okviru ene serije. GPS mrežo torej sestavimo na osnovi posameznih baznih vektorjev ali baznih vektorjev v okviru serij opazovanj.

Rezultat obdelave GPS opazovanj je bazni vektor med parom točk ali množica baznih vektorjev med točkami, opazovanimi v okviru posamezne serije. V geodeziji uporabljamo izključno samo fazna opazovanja, ki jih uporabimo za izračun komponent baznih vekorjev. Določitev baznega vektoja temelji na istočasno pridobljenih opazovanjih na vsaj dveh točkah. Najmanjši rezultat obdelave (izravnave) GPS opazovanj je bazni vektor. Le-ta se nanaša na geocentrični kartezični trirazsežni koordinatni sistem. Datum rezultatov obdelave GPS opazovanj je določen s privzetimi danimi količinami v obdelavi faznih opazovanj, ki jih najpogosteje predstavljajo dane koordinate ene točke. Obdelava opazovanj temelji na široki uporabi tehnik izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Ker izvajamo GPS izmero po korakih (serijah), poteka tako tudi obdelava v več korakih, katerih kompleksnost je definirana z želeno kakovostjo rezultatov.

Izravnavi (faznih) GPS opazovanj sledi izravnava baznih vektorjev v okviru geodetske mreže. Izravnava baznih vektorjev v geodetski mreži poteka z običajnimi postopki izravnave opazovanj v geodetski mreži v trirazsežnem prostoru (koordinatnem sistemu). Bazne vektorje lahko preračunavamo v poljuben koordinatni sistem. Kakovost rešitve pa je odvisna od kakovosti baznih vektorjev, pridobljenih v izravnavi GPS opazovanj. Izravnava geodetske mreže poteka ob minimalnem številu datumskih parametrov, kjer običajno privzamemo kot dano isto točko, kot v izravnavi faznih GPS opazovanj. Zadnji korak je ugotovitev skladnosti rezultatov izravnave geodetske mreže z obstoječo GPS mrežo. Če potrebujemo koordinate točk, ki so pridobljene z GPS izmero, v državnem koordinatnem sistemu, jih transformiramo še v državni koordinatni sistem.

2.4 Izravnava opazovanj v geodetski mreži

Po predhodni obdelavi opazovanj (upoštevanje pogreškov instrumenta, upoštevanje meteoroloških vplivov na opazovanja, redukcija opazovanj v izbrani koordinatni sistem ali na izbrano datumsko ploskev) so le-ta pripravljena za določitev koordinat točk v geodetski mreži. Ko smo pridobili nadštevilna opazovanja, imamo opravka s problemom izravnave opazovanj v geodetski mreži.

2.4.1 IZRAVNAVA GEODETSKE MREŽE PO METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV

Funkcionalni in stohastični model posredne izravnave lahko zapišemo kot:

$$E\{\mathbf{l}\} = \mathbf{B}\Delta \,, \tag{23}$$

$$D\{\mathbf{l}\} = \mathbf{P}^{-1}\sigma_0^2 \,, \tag{24}$$

kjer je $E\{\bullet\}$ pričakovana vrednost, $D\{\bullet\}$ disperzija slučajnega vektorja opazovanj $\mathbf{l}$, $\mathbf{B}$ matrika koeficientov enačb popravkov, $\boldsymbol{\Delta}$ vektor neznank, $\mathbf{P}$ matrika uteži slučajnega vektorja opazovanj in σ_0^2 referenčna varianca. Enačbo (23) lahko zapišemo v obliki enačb popravkov kot:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} \,. \tag{25}$$

Enačbe (23), (24) in (25) podajajo statistične lastnosti opazovanj in odnose med opazovanji, njim pripadajočimi popravki ter neznankami v geodetski mreži.

Problem izravnave po metodi najmanjših kvadratov rešimo ob izpolnitvi zahteve $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} \rightarrow \min.$ in izpolnitvi enačb popravkov $\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$. Ko imamo na razpolago nujno potrebno število datumskih parametrov za enolično določitev položajev točk v geodetski mreži, moramo zagotoviti, da ostanejo koordinate točk, ki definirajo datum mreže, po izravnavi nespremenjene. To zahtevo zapišemo v obliki veznih enačb:

$$\mathbf{D}^T\Delta = \mathbf{0} \,. \tag{26}$$

$\mathbf{D}^T$ je v tem primeru matrika datuma geodetske mreže, definiranega z minimalnim številom vezi med koordinatimi neznankami oziroma minimalnim številom danih količin, potrebnih za določitev koordinat vseh točk v mreži, ki jo sestavimo glede na tip opravljenih opazovanj. Opravka imamo torej s problemom izravnave funkcijsko odvisnih neznank. Zahtevo $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} \to \min.$ skupaj z danimi pogoji (25) in (26) izpolnimo ob izpolnitvi minimuma utežne funkcije:

$$\Phi' = \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} - 2\mathbf{k}_1^T(\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta - \mathbf{f}) - 2\mathbf{k}_2^T(\mathbf{D}^T\Delta - \mathbf{0}) \to \min. \tag{27}$$

Za pridobitev minimuma gornje enačbe parcialna odvoda funkcije Φ' po neznanih vektorjih $\boldsymbol{\Delta}$ in $\mathbf{v}$ izneačimo z 0, preuredimo in dobimo:

$$-\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{I}\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}\,, \tag{28}$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{k}_1 + \mathbf{D}\mathbf{k}_2 = \mathbf{0}\,. \tag{29}$$

V enačbah (25), (26), (28) in (29) so neznani vektorji $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}_1$, $\boldsymbol{\Delta}$ in $\mathbf{k}_2$. Te vektorje pridobimo z rešitvijo t.i. skupnega sistema normalnih enačb, ki ga sestavimo iz omenjenih sistemov enačb. Rešitev skupnega sistema vodi do ocene vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\Delta = \left(\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{f}\,, \tag{30}$$

$$\mathbf{v} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{B}\left(\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right]\mathbf{f}\,, \tag{31}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{B}\left(\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{f}\,, \tag{32}$$

kjer je $\mathbf{N}$ matrika koeficientov normalnih enačb $\mathbf{N} = \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}$. Referenčno varianco a-posteriori izračunamo iz izraza:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{r}\,, \tag{33}$$

kjer je r število nadštevilnih opazovanj v matematičnemu modelu.

Matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ in kovariančne matrike a-posteriori izračunamo z:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \left(\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T\right)^{-1} - \mathbf{D}\mathbf{D}^T\,, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\,, \tag{34}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{B}\left(\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T\right)^{-1}\mathbf{B}^T\,, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{vv}} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}}\,, \tag{35}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{B}\left(\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T\right)^{-1}\mathbf{B}^T\,, \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}\,. \tag{36}$$

Tako določene matrike kofaktorjev in kovariančne matrike so osnova za vrednotenje opazovanj in ocenjenih neznank.

V primeru, ko imamo v mreži dano večje število količin, ki zagotavljajo geodetski datum, kot bi jih glede na tip opazovanj in razsežnost koordinatnega sistema potrebovali, imamo opravka s t.i. predoločenim datumom. V tem primeru odpade enačba (26) ter zato tudi tretji člen enačbe (27). Rešitev problema izravnave pridobimo v tem primeru na enak način, kot je bilo opisano.

Ob nadštevilnih opazovanjih je sistem enačb (25) vedno predoločen, ker imamo na razpolago več enačb, kot je neznank. Kljub temu pa je v primeru, ko nimamo definiranega datuma mreže, sistem tudi poddoločen. V takem primeru govorimo o izravnavi proste mreže. Ko v mreži ne privzamemo nobene točke kot dane, datumsko matriko $\mathbf{D}^T$ zamenjamo s t.i. matriko notranjih vezi med neznankami. S to matriko je nato definiran datum geodetske mreže tako, kot ga v povprečju definirajo približne koordinate točk v geodetski mreži. Rešitev zopet pridobimo na enak način kot prej.

3. DRŽAVNI KOORDINATNI SISTEM SLOVENIJE

Slovenski državni koordinatni sistem temelji na astrogeodetskem datumu, s katerim je zagotovljena horizontalna komponenta geodetskega datuma, in višinskem datumu, ki zagotovlja višinsko komponento geodetskega datuma. Realizacijo slovenskega državnega koordinatnega sistema (koordinatnega sestava) predstavljajo tri skupine temeljnih geodetskih mrež:

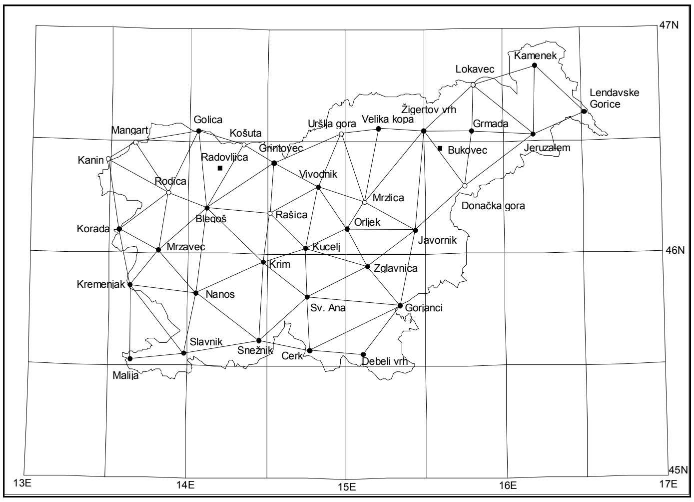
- položajna temeljna geodetska mreža, ki jo uporabljamo za določitev horizontalnih koordinat točk,
- višinska temeljna geodetska mreža, ki jo uporabljamo za določitev »nadmorske« višine točk,
- temeljna gravimetrična mreža, ki se uporablja za ustrezno obravnavo višin v okviru višinske temeljne geodetske mreže.

Takšno delitev na skupine temeljnih geodetskih mrež je opredelil Pravilnik o tehničnih normativih za mreže temeljnih geodetskih točk [4], ki predstavlja edino normativno besedilo o državnem koordinatnem sistemu Slovenije.

3.1 Položajna temeljna geodetska mreža Slovenije

Položajno temeljno geodetsko mrežo tvorita položajna geodetska mreža višjega in nižjega reda. Delitev na dva redova izhaja iz metod določitve horizontalnih koordinat ter stopnje njihove (relativne) natančnosti. V višji red položajne temeljne geodetske mreže so uvrščene: trigonometrična mreža I. reda, skupaj z astrogeodetsko in t.i. bazno mrežo, trigonometrična mreža II. glavnega in II. dopolnilnega reda, trigonometrična mreža III. glavnega reda, poligonometrična mreža III. glavnega reda in mestna trigonometrična mreža. V nižji red položajne temeljne geodetske mreže pa so uvrščene: trigonometrična mreža III. dopolnilnega reda, poligonometrična mreža III. dopolnilnega reda, trigonometrična mreža IV. reda, poligonometrična mreža IV. reda, navezovalna mreža ter mestni poligonometrični mreži I. in II. reda.

Astrogeodetska mreža Slovenije in s tem tudi celotna položajna temeljna geodetska mreža Slovenije ima svoje korenine v astrogeodetski mreži avstroogrske monarhije in astrogeodetski mreži bivše Jugoslavije. Astrogeodetski datum slovenske astrogeodetske mreže je definiran z astronomskima koordinatama ter nadmorsko višino fundamentalne točke Hermannskogel pri Dunaju, opazovanim astronomskim azimutom na fundamentalni točki proti trigonometrični točki I. reda Hundsheimer berg, privzetimi vrednostmi komponent odklona navpičnice in geoidne višine v fundamentalni točki, ki so enake 0 ter parametroma Besselovega referenčnega elipsoida. Zaradi zahtev klasične terestrične geodezije se trigonometrične točke nahajajo na izpostavljenih mestih, kot so vrhovi gora in hribov. Trigonometrično mrežo I. reda sestavlja 34 trigonometričnih točk I. reda, vendar obravnavamo v trigonometrični mreži I. reda Slovenije tudi trigonometrično točko I. reda 375 Gorjanci, ki je zaradi svoje lege za geometrijo mreže zelo pomembna. Tako obravnavamo kot trigonometrično mrežo I. reda Slovenije mrežo 35 točk, ki skupaj tvorijo 46 trikotnikov. Mreža pokriva ozemlje velikosti približno 230*140 km.



Slika 12: Trigonometrična mreža I. reda

Geodetske točke v položajni temeljni geodetski mreži imajo določene modulirane pravokotne koordinate Gauss-Krügerjeve konformne projekcije. V okviru te projekcije celotno ozemlje Slovenije obravnavamo v 5. meridianski coni. Vsaka točka položajne temeljne geodetske mreže ima določeno tudi »nadmorsko« višino.

Točke položajne temeljne geodetske mreže naj bi bile določene s predpisanim srednjim relativnim pogreškom dolžine stranice med točkama, ki je določen kot razmerje $\sigma_P : D$. Pri tem je σ_P standardna deviacija položaja točke in D dolžina stranice med dvema točkama istega reda. Potrebno natančnost položajev točk naj bi zagotavljala kotna in dolžinska opazovanja predpisane natančnosti oziroma uporaba instrumentarija ustrezne kvalitete.

Položajna temeljna geodetska mreža Slovenije je začela nastajati pred približno 150 leti in ni bila redno vzdrževana. Tako lahko mreža danes le s težavo izpolnjuje potrebe in zahteve današnjega časa. Prve težave pri uporabi mreže so bile povezane z začetki praktične uporabe elektrooptičnih razdaljemerov. Težave z mrežo so se pokazale zlasti ob širši uporabi GPS tehnologije. Tako lahko danes trdimo, da je položaj astrogeodetske mreže Slovenije na Besselovem referenčnem elipsoidu napačen za približno 350 m, da so v mreži prisotne velike lokalne deformacije merila, ki znašajo do 30 mm/km. Zato je natančnost mreže dokaj neenakomerna, kar povzroča geodetu pri vsakdanjem praktičnem delu precej težav. Nadaljevanje uporabe obstoječega koordinatnega sistema tako samo povečuje težave ob neizbežnem prehodu v nov sistem, ki čaka tudi našo državo.

Sodobna tehnologija, ki jo imamo na razpolago, in uvajanje uporabe terestričnih koordinatnih sistemov v številnih (evropskih) državah v vsakdanjo geodetsko prakso zahtevata izvedbo sanacije položajne temeljne geodetske mreže oziroma njeno opustitev ter prehod v nov terestrični koordinatni sistem. Ta prehod pa mora biti izveden tako, da bo ohranil kakovost položajev obstoječih prostorskih podatkov in odstranil njihove slabosti.

3.2 Višinska temeljna geodetska mreža Slovenije

Višinsko osnovo državnega ozemlja predstavljata višji in nižji red višinske temeljne geodetske mreže. V višji red višinske temeljne geodetske mreže spadajo: nivelmanska mreža velike natančnosti (NVN), nivelmanska mreža I. reda, nivelmanska mreža II. reda ter mestna nivelmanska mreža I. reda. V nižji red višinske temeljne geodetske mreže pa spadajo: nivelmanska mreža III. reda, nivelmanska mreža IV. reda ter mestna nivelmanska mreža II. reda. V okviru višinske geodetske mreže so višine točk - reperjev predstavljene z nadmorskimi višinami.

Po preračunu nivelmanske mreže Slovenije, ki je bil opravljen v letih 1999 in 2000, sestavlja nivelmansko mrežo Slovenije sedem nivelmanskih zank. V nivelmanske zanke so vključeni nivelmanski vlaki iz I. izmere NVN (I/5: Postojna-Rupa-Reka), II. izmere NVN in izmer nivelmanskih vlakov mreže I. reda, ki smo jih izvedli po letu 1985. Posamezne nivelmanske zanke na območju Slovenije so lahko zaključene le s pomočjo izmer na območju Hrvaške.

Nivelmanska mreža je navezana na fundamentalni reper FR 1049 (N. 374), ki je stabiliziran v bližini Ruš. Fundamentalni reper je bil stabiliziran za potrebe izmere avstroogrske nivelmanske mreže. Nadmorska višina fundamentalnega reperja je določena v t.i. višinskem datumu Trst, saj normalni reper za navezavo avstroogrske nivelmanske mreže na ničelno ekvipotencialno ploskev predstavlja reper na pomolu Sartorio v Trstu. Nadmorska višina normalnega reperja je bila določena na osnovi enoletnih opazovanj nivoja Jadranskega morja v letu 1875 in je znašala 3.352 $\pm$ 0.01 m. Mareograf na pomolu v Trstu so postavili leta 1869, vendar so bili prvi podatki o registraciji nivoja Jadranskega morja za leto 1875 objavljeni leta 1877. V avstroogrski monarhiji so višino normalnega reperja določili na osnovi enoletnih opazovanj zato, ker so v teh letih v Evropi želeli povezati srednje nivoje Sredozemskega morja s severnimi morji in določiti enotni normalni reper za celo Evropo. Ker so ugotovili, da je srednji nivo Sredozemskega morja za 13 cm nižji od srednjega nivoja severnih morij, so se odločili, da ne bodo določili enotnega normalnega reperja za celo Evropo, temveč bodo obdržale posamezne države svoje normalne reperje.

Nadmorske višine reperjev so podane v sistemu t.i. normalnih ortometričnih višin. Normalne ortometrične višine so začeli uporabljati v preteklosti, ker so bile meritve težnosti zapletene in dolgotrajne. V tem primeru so namesto izmerjene vrednosti težnosti uporabljali izračunane vrednosti. Normalne ortometrične višine se ne nanašajo na nobeno do sedaj omenjeno referenčno ploskev, nimajo geometrijskega pomena in niso enolične. Popravki višinskih razlik, pridobljenih z geometričnim nivelmanom, so za vključitev le-teh v sistem normalnih ortometričnih višin majhni. Če imamo na voljo ustrezne podatke o težnosti na posameznih reperjih nivelmanske mreže, so višine brez posebnega pomena. Višinsko razliko v sistemu normalnih ortometričnih višin izračunamo tako, da merjeno višinsko razliko popravimo za normalni ortometrični popravek (NOP_{ij}), ki ga izračunamo:

$$NOP_{ij} = \sum_{k=i}^{j} \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} \delta l_k + \frac{\overline{\gamma}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i^N - \frac{\overline{\gamma}_j - \gamma_0}{\gamma_0} H_j^N , \qquad (37)$$

kjer je $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j)$ srednja vrednost normalne težnosti v točkah P_i in P_j, $\overline{\gamma}_i$ srednja vrednost normalne težnosti na normali točke P_i ter γ_0 poljubna konstanta.

Za praktičen izračun normalnega ortometričnega popravka uporabljamo v Sloveniji izraz:

$$NOP_{ij} = -0.000025685 \cdot H_S \Delta\varphi , \qquad (38)$$

kjer je H_S srednja normalna ortometrična višina točk i in j v metrih, $\Delta\varphi$ razlika geografskih širin točk i in j v ločnih sekundah ($\Delta\varphi'' = \varphi_{P_1}'' - \varphi_{P_2}''$) in NOP_{ij} normalni ortometrični popravek v milimetrih.

Podobno kot položajno temeljno geodetsko mrežo Slovenije bo potrebno tudi višinsko temeljno geodetsko mrežo popraviti z ustrezno opravljeno sodobno izmero geometričnega nivelmana ter ustrezno opravljenimi gravimetričnimi opazovanji. V prihodnjih letih nas čaka preračun višinske temeljne geodetske mreže v nov evropski višinski sistem.

3.3 Gravimetrične temeljne geodetske mreže v Sloveniji

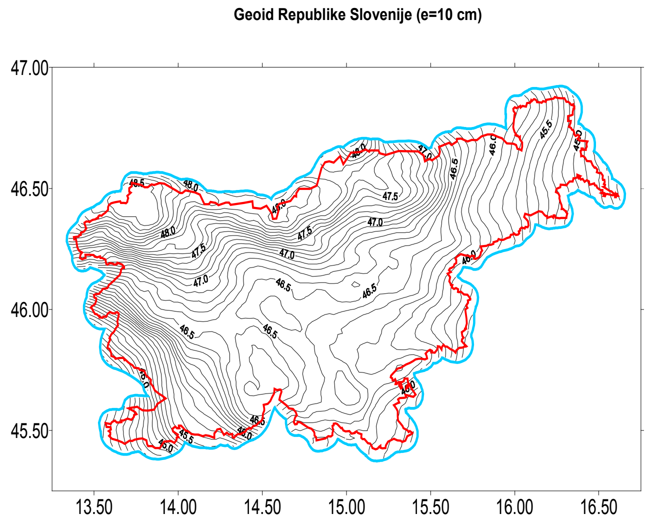
V zgodovini sta obstajali na območju Slovenije gravimetrični mreži I. in II. reda bivše Jugoslavije. Gravimetrično mrežo I. reda je tvorilo 15 točk, v Sloveniji je točka v Ljubljani. Konec šestdesetih let prejšnjega stoletja sta bili obe mreži združeni v eno t.i. osnovno gravimetrično mrežo bivše Jugoslavije. To mrežo je tvorilo približno 350 točk, od tega v Sloveniji 32 točk. Meritve so se nanašale na stari potsdamski sistem.

V Sloveniji obstajata tudi obsežna regionalna in lokalna gravimetrična izmera, ki ju je izvajal Geološki zavod Slovenije v obdobju po letu 1951. Regionalna izmera je bila opravljena z namenom izdelave regionalne gravimetrične karte Slovenije. Skupno je izmera na celem ozemlju vključevala približno 2800 gravimetričnih točk. Lokalno oz. detajlno izmero so izvajali strokovnjaki Geološkega zavoda Ljubljana za potrebe raziskav v zvezi z nafto in zemeljskim plinom. Popolnejši podatki izmer obstajajo samo za obdobje 1985–1991.

Leta 1995 je Geodetska uprava Republike Slovenije začela z delom na obnovi gravimetričnih mrež na območju Slovenije. Tako je bilo stabiliziranih in opazovanih šest novih absolutnih gravimetričnih točk. Te točke so: grad Bogenšperk, Gotenica, cerkev sv. Areha na Pohorju, Sevniški grad, grad Socerb ter trdnjava Kluže pri Bovcu. Izmero ter obdelavo opazovanj so opravili nemški in italijanski strokovnjaki. Te točke naj bi služile kot osnova za novo gravimetrično mrežo Slovenije.

3.4 Geoid v Sloveniji

Prve meritve na področju Slovenije za potrebe določitve ploskve geoida so bile opravljene še v času avstroogrske monarhije. V času pred prvo svetovno vojno je bil po poldnevniku Ljubljane izmerjen t.i. geoidni profil.



Slika 13: Ploskev absolutnega geoida na območju Slovenije

Po drugi svetovni vojni je bila prva objavljena publikacija s področja raziskav težnostnega polja Zemlje za območje nekdanje Jugoslavije doktorska disertacija profesorja Gradbene fakultete v Sarajevu A. Muminagića.

Profesorja K. Čolić in T. Bašić s sodelavci Geodetske fakultete iz Zagreba sta leta 1992 izračunala relativni astrogeodetski geoid, ki zajema območje Slovenije in del Hrvaške. Za izračun tega modela geoida je bilo uporabljenih 117 točk z izračunanimi (izmerjenimi) komponentami odklona navpičnice, od katerih se na ozemlju Slovenije nahaja 32 točk. Geoid je izračunan z metodo »remove-restore« in kolokacijo po metodi najmanjših kvadratov.

Leta 2000 je bil izračunan nov absolutni geoid na območju Slovenije, ki ga je v okviru doktorske disertacije izračunal B. Pribičević. V izračun je bilo vključenih 98 točk z izračunanimi odkloni navpičnice, 50 točk z ozemlja Slovenije. Vključenih je bilo še približno tri tisoč vrednosti anomalij težnosti. Geoid je bil zopet izračunan z metodo »remove-restore« z uporabo kolokacije po metodi najmanjših kvadratov. Natančnost izračunanih geoidnih višin je povprečno 3 cm, vendar je višja na območjih, kjer je število točk z znanimi geoidnimi višinami (GPS/nivelman) večje.

3.5 Slovenija in EUREF

Novi referenčni koordinatni sistemi, ki nadomeščajo obstoječe državne astrogeodetske mreže, morajo biti vzpostavljeni v skladu z zahtevami in potrebami moderne geodezije ter moderne tehnologije, ki jo uporabljamo za določitev položaja nasploh. Med temi zahtevami je posebno pomembna vzpostavitev koordinatnih sistemov, ki veljajo za celotno Zemljo ali vsaj za posamezne kontinente. Danes za te naloge uporabljamo večinoma GPS tehnologijo. Tako je bil v Sloveniji leta 1994 v okviru izmere EUREF CRO-SLO ’94 določen položaj 8 točk v ETRS89 koordinatnem sistemu. Namen druge EUREF izmere leta 1995 z imenom SLOVENIA’95 je bil zgostitev EUREF mreže točk na območju Slovenije. EUREF izmera leta 1995 je bila izvedena na vseh 34 (35) točkah astrogeodetske mreže, na 2 točkah triangulacijskih baznih mrež (Bukovec in Radovljica), na eni trigonometrični točki II. reda in na 12 na novo vzpostavljenih geodinamičnih točkah. Končni rezultat te izmere so položaji točk v koordinatnih sistemih oziroma sestavih ITRS93 (1995.7) in ETRS89 (1989.0).

Slovenija se nahaja na tektonsko in seizmično aktivnem področju Evrope. Zato se je tudi priključila geodinamičnemu projektu CROREF-CRODYN ’96, v okviru katerega je bilo opazovanih skupaj 68 točk. Od teh točk je bilo ponovno opazovanih tudi 5 EUREF točk v Sloveniji in 10 na Hrvaškem. Namen te izmere je bila vzpostavitev goste geodinamične mreže vzdolž jadranske obale ter razširitev EUREF referenčnega sestava na Hrvaško. Kot rezultat omenjenih izmer so izračunani ter tudi objavljeni položaji točk na našem in sosednjih ozemljih v koordinatnem sistemu ETRS89. Ti rezultati pa niso bili uradno potrjeni s strani Tehnične delovne skupine EUREF (EUREF Technical Working Group), predvsem zaradi prevelikih razlik koordinat točk, opazovanih v več izmerah. Pripravljajo se aktivnosti, ki bodo odstranile nastale razlike.

4. LITERATURA

Heiskanen W. A., Moritz H.*, 1990: Physical geodesy, Reprint Institute of Physical Geodesy, Technical University Graz*

Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Collins J.*, 1994: Global Positioning System-Theory and Practice, Third edition, Springer-Verlag, Wien, New York*

Muminagić A.*, 1987: Viša geodezija II, Naučna knjiga, Beograd*

Socialistična Republika Slovenija, Republiška geodetska uprava*, 1981: Pravilnik o tehničnih normativih za mreže temeljnih geodetskih točk, Ljubljana*

http://www.euref-iag.org/

http://www.eurogeographics.org/

http://www.iers.org/

http://igscb.jpl.nasa.gov/

5. IZPITNA VPRAŠANJA

1. Koordinatni sistem, koordinatni sestav, geodetski datum.
2. Terestrični koordinatni sistemi.
3. Koordinatni sistemi klasične geodezije: astrogeodetski in višinski datum.
4. Višinske referenčne ploskve in tipi višin v geodeziji.
5. Gravimetrični sistem in njegova naloga.
6. Geodetske mreže, datum geodetske mreže, datumske informacije geodetskih opazovanj.
7. Terestrične in GPS geodetske mreže.
8. Izravnava geodetske mreže.
9. Državni koordinatni sistem: horizontalna in višinska komponenta koordinatnega sistema.
10. Prihodnji državni koordinatni sistem.